1. $0 < a < b$인 실수, $a,\ b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $\dfrac{a}{1+a} < \dfrac{b}{1+b}$　　② $\dfrac{a}{1+a} \le \dfrac{b}{1+b}$

③ $\dfrac{a}{1+a} > \dfrac{b}{1+b}$　　④ $\dfrac{a}{1+a} \ge \dfrac{b}{1+b}$

⑤ $\dfrac{a}{1+a} = \dfrac{b}{1+b}$

해설

$0 < a < b$에서 $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} \cdots$ ㉠

㉠의 양변에 1을 더하면

$\dfrac{1}{a} + 1 > \dfrac{1}{b} + 1,\ \dfrac{1+a}{a} > \dfrac{1+b}{b} \cdots$ ㉡

따라서 ㉡의 역수를 취하면 $\dfrac{a}{1+a} < \dfrac{b}{1+b}$

2. $-1 < x \leqq 2,\ 1 < y \leqq 3$일 때, $a < x - y < b$를 계산하여 $b - a$의 값을 구하면?

① -14 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ -5

해설

$-1 < x \leq 2,\ 1 < y \leq 3$에서
$x - y$의 가장 작은 값은 $-1 - 3 = -4$
가장 큰 값은 $2 - 1 = 1$
$\therefore -4 < x - y < 1$이므로 $a = -4,\ b = 1$
$b - a = 1 + 4 = 5$

3. $-4 \leq x \leq a,\ 1 \leq y \leq 5$ 에서 $\frac{1}{2}x + 3y$ 의 최댓값이 16 일때, a 는?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$-4 \leq x \leq a$ 에서 $-2 \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{a}{2} \cdots\cdots$ ㉠

$1 \leq y \leq 5$ 이므로 $3 \leq 3y \leq 15 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $1 \leq \frac{1}{2}x + 3y \leq \frac{a}{2} + 15$

따라서 최댓값이 16 이므로 $a = 2$

4. 정수 x의 값이 $-2 \le x \le 2$일 때, $2x+1$의 최댓값은?

① -3　② 1　③ 3　④ 5　⑤ 7

해설

$2x+1$은 x에 2를 곱하고 1을 더하여 얻은 값이다. 그러므로 x가 커지면 $2x+1$값도 커진다.
따라서 $x=2$일 때 $2x+1$값은 최대이고 그 값은 5 이다.

해설

$-2 \le x \le 2 \;\Rightarrow\; -4 \le 2x \le 4$
$\Rightarrow\; -3 \le 2x+1 \le 5$
$\therefore$ 최댓값은 5

5. 다음 중 연립부등식 $\begin{cases} 5x+3<18 \\ -3x+2<0 \end{cases}$ 의 해가 아닌 것은?

① 1 ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

$\begin{cases} 5x+3<18 \\ -3x+2<0 \end{cases}$ 을 풀면 $\begin{cases} x<3 \\ x>\frac{3}{2} \end{cases}$ 이므로

$\frac{2}{3}<x<3$

6. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-1>-3 \\ x+3 \geq 3x-1 \end{cases}$ 의 해를 구하면?

① $1 < x \leq 2$　② $1 \leq x < 2$　③ $x > 2$
④ $-1 \leq x < 2$　⑤ $-1 < x \leq 2$

해설

$\begin{cases} 2x-1>-3 \\ x+3 \geq 3x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x \leq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow -1 < x \leq 2$

7. 다음 연립방정식의 해 중 자연수의 개수가 가장 많은 연립방정식을 골라라.

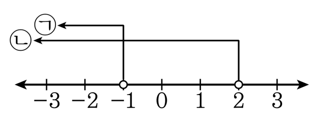
① $\begin{cases} x \leq 1 \\ x > -1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x > 2 \\ x < 3 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq 3 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x > 2 \\ x > 4 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x \leq -1 \\ x > -5 \end{cases}$

해설

① $-1 < x \leq 1$ 이므로 자연수는 1 한 개다.
② $2 < x < 3$ 이므로 자연수는 없다.
③ $x \leq 1$ 이므로 자연수는 1 로 한 개다.
④ $x > 4$ 이므로 자연수는 5, 6, 7, 8$\cdots$ 이다.
⑤ $-5 < x \leq -1$ 이므로 자연수는 없다.

8. 다음은 연립부등식 $\begin{cases} ax+b<0 \cdots ㉠ \\ cx+d>0 \cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해를 수직선 위에 나타낸 것이다. 이 때, 연립부등식의 해는?



① $x<-1$ ② $x<2$ ③ $-1<x<2$

④ $-1\le x<2$ ⑤ $x>-1$

해설

$x<-1$과 $x<2$ 의 공통부분이 연립부등식의 해이다.

$\therefore\ x<-1$

9. $A < B < C$ 꼴의 문제를 풀 때 알맞은 것은?

① $\begin{cases} A < B \\ A < C \end{cases}$ ② $\begin{cases} A < B \\ B < C \end{cases}$ ③ $\begin{cases} A < C \\ B < C \end{cases}$

④ $\begin{cases} B < A \\ B < C \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} A < B \\ C < B \end{cases}$

해설

$A < B < C$ 꼴의 부등식은

$\begin{cases} A < B \\ B < C \end{cases}$ 로 고쳐서 푼다.

10. 다음 연립부등식 중 해가 존재하는 경우를 모두 골라라.

㉠ $\begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \end{cases}$	㉡ $\begin{cases} x > 5 \\ x \le 3 \end{cases}$	㉢ $\begin{cases} x > 2 \\ x \le 2 \end{cases}$
㉣ $\begin{cases} x < 1 \\ x \ge 3 \end{cases}$	㉤ $\begin{cases} x \le 6 \\ x \ge 6 \end{cases}$	

▶ 답 :

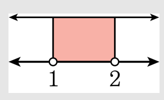
▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

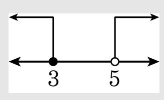
▷ 정답 : ㉤

해설

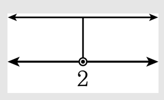
㉠ $\begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \end{cases}$



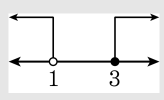
㉡ $\begin{cases} x > 5 \\ x \le 3 \end{cases}$



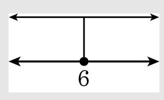
㉢ $\begin{cases} x > 2 \\ x \le 2 \end{cases}$



㉣ $\begin{cases} x < 1 \\ x \ge 3 \end{cases}$



㉤ $\begin{cases} x \le 6 \\ x \ge 6 \end{cases}$



11. 부등식 $|x-1|<2$을 풀면?

① $-1<x<0$ ② $-1<x<3$
③ $1<x<3$ ④ $x<-1$ 또는 $x>3$
⑤ $\frac{1}{2}<x<1$

해설
$|x-1|<2$에서 $-2<x-1<2$
$\therefore -1<x<3$

12. x가 정수일 때, $|x-2| \leq 5, x < 3$ 를 동시에 만족하는 x의 값을 모두 더하면?

① -7　　② -5　　③ -3　　④ -1　　⑤ 0

해설

$|x-2| \leq 5 \leftrightarrow -3 \leq x \leq 7$

x는 $-3 \leq x < 3$인 정수

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$

13. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 2x-5>3-2x \\ 2(x-3)\le x+4 \end{cases}$$

① $2\le x<10$ ② $2<x\le 10$ ③ $2<x<10$

④ $2\le x\le 10$ ⑤ $x\le 10$

해설

첫 번째 부등식에서 $x>2$ ⋯⋯ ㉠

두 번째 부등식에서 $2x-6\le x+4$

$\therefore x\le 10$ ⋯⋯ ㉡

따라서, 구하는 해는 ㉠과 ㉡를

동시에 만족하는 x의 값이므로

$\therefore 2<x\le 10$

14. 연립부등식 $\begin{cases} x-1>2x-3 \\ x^2 \le x+2 \end{cases}$ 의 해는?

① $x \le -1$　　② $-1 \le x < 1$　　③ $-1 \le x < 2$

④ $1 < x < 2$　　⑤ $2 \le x < 4$

해설

$x-1>2x-3$에서 $-x>-2$

$\therefore x<2 \cdots$ ㈎

$x^2 \le x+2$에서 $x^2-x-2 \le 0$

$\therefore -1 \le x \le 2 \cdots$ ㈏

따라서 ㈎, ㈏의 공통 범위를 구하면

$-1 \le x < 2$이다.

15. 부등식 $-x^2 - kx + k < 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 k의 범위를 정하면 $a < k < \beta$이다. 이 때, $\alpha + \beta$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x^2 + kx - k > 0$이 모든 x에 대해서 성립하려면,
판별식이 0보다 작아야 한다
$D = k^2 + 4k < 0$에서
$k(k+4) < 0$, $-4 < k < 0$,
$\alpha = -4$, $\beta = 0$
$\therefore \quad \alpha + \beta = -4$

16. 모든 실수 x에 대하여 $a(x^2+2x+2) \geq 2x^2+4x+5$가 성립할 때 a의 최솟값을 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$a(x^2+2x+2) \geq 2x^2+4x+5$에서

$(a-2)x^2+2(a-2)x+(2a-5) \geq 0$

이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로

$a-2>0 \cdots$ ㉠

판별식 $\dfrac{D}{4}=(a-2)^2-(a-2)(2a-5) \leq 0$이므로

$a^2-4a+4-(2a^2-9a+10)$

$=a^2-4a+4-2a^2+9a-10$

$=-a^2+5a-6$

$=-(a^2-5a+6)$

$=-(a-2)(a-3) \leq 0$

따라서 $(a-2)(a-3) \geq 0$이므로

$a \leq 2$ 또는 $a \geq 3 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a \geq 3$

따라서 a의 최솟값은 3

17. 이차부등식 $x^2+2ax+4a+5>0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때 이를 만족하는 정수 a의 값이 <u>아닌</u> 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

이차부등식 $x^2+2ax+4a+5>0$
이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로
$\frac{D}{4}=a^2-(4a+5)<0$
$a^2-4a-5<0$, $(a-5)(a+1)<0$
$\therefore -1<a<5$
따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3, 4이다.

18. 이자부등식 $x^2 + ax + b < 0$의 해가 $2 < x < 3$일 때, $a + b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$2 < x < 3$ 가 해이므로
$(x-2)(x-3) < 0$
$x^2 - 5x + 6 < 0$, $a = -5, b = 6$
$\therefore\ a + b = 1$

19. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$의 해가 $-2 < x < 1$일 때 부등식 $cx^2 - bx - a > 0$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 4개　④ 6개　⑤ 9개

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 1$ 이므로 $a < 0$
해가 $-2 < x < 1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1) < 0$,
즉 $x^2 + x - 2 < 0$ 양변에 a 를 곱하면
$ax^2 + ax - 2a > 0$ 이 부등식이
$ax^2 + bx + c > 0$ 과 같으므로
$b = a, c = -2a \cdots$(가)
(가)를 $cx^2 - bx - a > 0$ 에 대입하면
$-2ax^2 - ax - a > 0$, $2x^2 + x + 1 > 0 (\because -a > 0)$
이 때 방정식 $2x^2 + x + 1 = 0$ 의 판별식
$D = 1^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로
$2x^2 + x + 1 > 0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1, 2, 3, \cdots, 9$ 의 9개이다.

20. $ax^2 - 2ax + 3 < 0$를 만족하는 x가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a > 0$　② $-1 < a < 3$　③ $0 \le a \le 3$
④ $-1 < a < 4$　⑤ $-1 \le a \le 4$

해설

(ⅰ) $a = 0$일 때, 성립한다.
(ⅱ) $a \ne 0$일 때, 함수 $y = ax^2 - 2ax + 3$에서 $D \le 0$이므로
$a^2 - 3a \le 0$
$\therefore 0 < a \le 3 (\because a \ne 0)$

21. 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \le 0 \\ x^2 + 2x + 2 \ge 0 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

$x^2 - 2x + 1 \le 0 \to (x-1)^2 \le 0$
$(x-1)^2$ 은 항상 0 이상이므로
만족하는 해는 $x = 1$ 이 유일
$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$
$\to (x+1)^2 + 1 \ge 1$
$\therefore$ 모든 실수
$\therefore x = 1$

22. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x-4<0 \\ (x-a)(x+2)>0 \end{cases}$ 의 해가 $-2<x<1$이 될 때, 실수 a의 최댓값은?

① 0 ② -2 ③ -4 ④ -6 ⑤ -8

해설

$x^2+3x-4<0$의 해가
$-4<x<1$이므로
연립부등식의 해가 $-2<x<1$가 되려면
$(x-a)(x+2)>0$의 해는
$x<a, x>-2$이고, $a\le-4$이다.

23. 이차함수 $y = x^2 - 4ax + 1$ 의 그래프가 직선 $y = 2x - a$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있도록 하는 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a > 0$　② $-\frac{1}{4} < a < 0$　③ $-\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$
④ $-\frac{3}{4} < a < \frac{1}{4}$　⑤ $-\frac{3}{4} < a < 0$

해설

$$\begin{cases} y = x^2 - 4ax + 1 \\ y = 2x - a \end{cases}$$

근이 존재하지 않아야 하므로

$2x - a = x^2 - 4ax + 1$

$x^2 + (-4a - 2)x + (a + 1) = 0$

$D < 0 :\ (2a + 1)^2 - (a + 1) < 0$

$4a^2 + 3a = a(4a + 3) < 0$

$\therefore\ -\frac{3}{4} < a < 0$

24. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \leq k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1,\ a < 2$

ii) $f(1) > 0, \quad 1 - a + 9 > 0, \quad a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D} = a^2 - 4 \cdot 9 \geq 0,\ \ a \geq 6,\ \ a \leq -6$

따라서 i), ii), iii) 에 의해 $a \leq -6$

$\therefore k = -6$

25. 두 부등식 $x^2-x-2>0$, $x^2-(a-3)x-3a<0$를 동시에 만족하는 정수가 -2뿐일 때, a의 값의 범위를 구하면 $m<a\le n$이다. mn의 값을 구하시오.

▶ 답 :

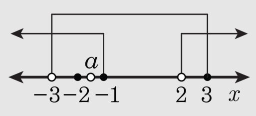
▷ 정답 : -6

해설

$x^2-x-2>0$에서 $x<-1$, $x>2$

$x^2-(a-3)x-3a<0$에서

$(x+3)(x-a)<0$



그림에서와 같이 동시에 만족하는

정수값이 -2뿐이려면 $-2<a\le 3$이다.

$\therefore\ -2<a\le 3$