1. $0 < a < b$ 인 실수, a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $\dfrac{a}{1+a} < \dfrac{b}{1+b}$ ② $\dfrac{a}{1+a} \leq \dfrac{b}{1+b}$
③ $\dfrac{a}{1+a} > \dfrac{b}{1+b}$ ④ $\dfrac{a}{1+a} \geq \dfrac{b}{1+b}$
⑤ $\dfrac{a}{1+a} = \dfrac{b}{1+b}$

해설

$0 < a < b$ 에서 $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} \cdots$ ㉠

㉠의 양변에 1을 더하면

$\dfrac{1}{a} + 1 > \dfrac{1}{b} + 1,\ \dfrac{1+a}{a} > \dfrac{1+b}{b} \cdots$ ㉡

따라서 ㉡의 역수를 취하면 $\dfrac{a}{1+a} < \dfrac{b}{1+b}$

2. $-1 < x \leqq 2,\ 1 < y \leqq 3$일 때, $a < x - y < b$를 계산하여 $b - a$의 값을 구하면?

① -14 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ -5

해설

$-1 < x \leq 2,\ 1 < y \leq 3$에서

$x - y$의 가장 작은 값은 $-1 - 3 = -4$

가장 큰 값은 $2 - 1 = 1$

$\therefore -4 < x - y < 1$이므로 $a = -4,\ b = 1$

$b - a = 1 + 4 = 5$

3. $-4 \le x \le a,\ 1 \le y \le 5$에서 $\frac{1}{2}x + 3y$ 의 최댓값이 16 일때, a는?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$-4 \le x \le a$에서 $-2 \le \frac{1}{2}x \le \frac{a}{2} \cdots\cdots$ ㉠

$1 \le y \le 5$ 이므로 $3 \le 3y \le 15 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $1 \le \frac{1}{2}x + 3y \le \frac{a}{2} + 15$

따라서 최댓값이 16 이므로 $a = 2$

4. 정수 x의 값이 $-2 \leq x \leq 2$일 때, $2x+1$의 최댓값은?

① -3　② 1　③ 3　④ 5　⑤ 7

해설

$2x+1$은 x에 2를 곱하고 1을 더하여 얻은 값이다. 그러므로 x가 커지면 $2x+1$값도 커진다.
따라서 $x=2$일 때 $2x+1$값은 최대이고 그 값은 5 이다.

해설

$-2 \leq x \leq 2 \;\Rightarrow\; -4 \leq 2x \leq 4$

$\Rightarrow\; -3 \leq 2x+1 \leq 5$

$\therefore$ 최댓값은 5

5. 다음 중 연립부등식 $\begin{cases} 5x+3<18 \\ -3x+2<0 \end{cases}$ 의 해가 아닌 것은?

① 1 ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

$\begin{cases} 5x+3<18 \\ -3x+2<0 \end{cases}$ 을 풀면 $\begin{cases} x<3 \\ x>\frac{3}{2} \end{cases}$ 이므로

$\frac{2}{3}<x<3$

6. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-1>-3 \\ x+3 \geq 3x-1 \end{cases}$ 의 해를 구하면?

① $1 < x \leq 2$　② $1 \leq x < 2$　③ $x > 2$

④ $-1 \leq x < 2$　⑤ $-1 < x \leq 2$

해설

$$\begin{cases} 2x-1>-3 \\ x+3 \geq 3x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow -1 < x \leq 2$

7. 다음 연립방정식의 해 중 자연수의 개수가 가장 많은 연립방정식을 골라라.

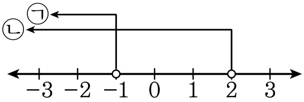
① $\begin{cases} x \le 1 \\ x > -1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x > 2 \\ x < 3 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x \le 1 \\ x \le 3 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x > 2 \\ x > 4 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x \le -1 \\ x > -5 \end{cases}$

해설

① $-1 < x \le 1$ 이므로 자연수는 1 한 개다.
② $2 < x < 3$ 이므로 자연수는 없다.
③ $x \le 1$ 이므로 자연수는 1 로 한 개다.
④ $x > 4$ 이므로 자연수는 5, 6, 7, 8$\cdots$ 이다.
⑤ $-5 < x \le -1$ 이므로 자연수는 없다.

8. 다음은 연립부등식 $\begin{cases} ax+b<0 \cdots ㉠ \\ cx+d>0 \cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해를 수직선 위에 나타낸 것이다. 이 때, 연립부등식의 해는?



① $x<-1$ ② $x<2$ ③ $-1<x<2$

④ $-1 \le x<2$ ⑤ $x>-1$

해설

$x<-1$과 $x<2$ 의 공통부분이 연립부등식의 해이다.

$\therefore\ x<-1$

9. $A < B < C$ 꼴의 문제를 풀 때 알맞은 것은?

① $\begin{cases} A < B \\ A < C \end{cases}$ ② $\begin{cases} A < B \\ B < C \end{cases}$ ③ $\begin{cases} A < C \\ B < C \end{cases}$

④ $\begin{cases} B < A \\ B < C \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} A < B \\ C < B \end{cases}$

해설

$A < B < C$ 꼴의 부등식은

$\begin{cases} A < B \\ B < C \end{cases}$ 로 고쳐서 푼다.

10. 다음 연립부등식 중 해가 존재하는 경우를 모두 골라라.

㉠ $\begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \end{cases}$ ㉡ $\begin{cases} x > 5 \\ x \le 3 \end{cases}$ ㉢ $\begin{cases} x > 2 \\ x \le 2 \end{cases}$

㉣ $\begin{cases} x < 1 \\ x \ge 3 \end{cases}$ ㉤ $\begin{cases} x \le 6 \\ x \ge 6 \end{cases}$

▶ 답 :

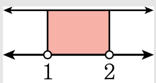
▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

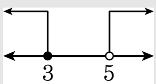
▷ 정답 : ㉤

해설

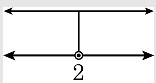
㉠ $\begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \end{cases}$



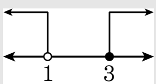
㉡ $\begin{cases} x > 5 \\ x \le 3 \end{cases}$



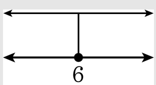
㉢ $\begin{cases} x > 2 \\ x \le 2 \end{cases}$



㉣ $\begin{cases} x < 1 \\ x \ge 3 \end{cases}$



㉤ $\begin{cases} x \le 6 \\ x \ge 6 \end{cases}$



11. 부등식 $|x-1|<2$을 풀면?

① $-1<x<0$

② $-1<x<3$

③ $1<x<3$

④ $x<-1$ 또는 $x>3$

⑤ $\frac{1}{2}<x<1$

해설

$|x-1|<2$에서 $-2<x-1<2$

$\therefore -1<x<3$

12. x가 정수일 때, $|x-2| \le 5, x < 3$ 를 동시에 만족하는 x의 값을 모두 더하면?

① -7 ② -5 ③ -3 ④ -1 ⑤ 0

해설

$|x-2| \le 5 \leftrightarrow -3 \le x \le 7$

x는 $-3 \le x < 3$인 정수

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$

13. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 2x - 5 > 3 - 2x \\ 2(x-3) \le x + 4 \end{cases}$$

① $2 \le x < 10$　② $2 < x \le 10$　③ $2 < x < 10$

④ $2 \le x \le 10$　⑤ $x \le 10$

해설

첫 번째 부등식에서 $x > 2 \cdots\cdots$ ㉠
두 번째 부등식에서 $2x - 6 \le x + 4$
$\therefore x \le 10 \cdots\cdots$ ㉡
따라서, 구하는 해는 ㉠과 ㉡를
동시에 만족하는 x의 값이므로
$\therefore 2 < x \le 10$

14. 연립부등식 $\begin{cases} x-1>2x-3 \\ x^2 \le x+2 \end{cases}$ 의 해는?

① $x \le -1$　　② $-1 \le x < 1$　　③ $-1 \le x < 2$

④ $1 < x < 2$　　⑤ $2 \le x < 4$

해설

$x-1>2x-3$에서 $-x>-2$

$\therefore x<2 \cdots$ (가)

$x^2 \le x+2$에서 $x^2-x-2 \le 0$

$\therefore -1 \le x \le 2 \cdots$ (나)

따라서 (가), (나)의 공통 범위를 구하면

$-1 \le x < 2$이다.

15. 부등식 $-x^2 - kx + k < 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 k의 범위를 정하면 $\alpha < k < \beta$이다. 이 때, $\alpha + \beta$의 값은?

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

$x^2 + kx - k > 0$이 모든 x에 대해서 성립하려면,
판별식이 0보다 작아야 한다
$D = k^2 + 4k < 0$에서
$k(k+4) < 0$, $-4 < k < 0$,
$\alpha = -4$, $\beta = 0$
$\therefore \quad \alpha + \beta = -4$

16. 모든 실수 x에 대하여 $a(x^2+2x+2) \geq 2x^2+4x+5$가 성립할 때 a의 최솟값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$a(x^2+2x+2) \geq 2x^2+4x+5$에서
$(a-2)x^2+2(a-2)x+(2a-5) \geq 0$
이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로
$a-2>0 \cdots$ ㉠
판별식 $\dfrac{D}{4}=(a-2)^2-(a-2)(2a-5) \leq 0$이므로
$a^2-4a+4-(2a^2-9a+10)$
$=a^2-4a+4-2a^2+9a-10$
$=-a^2+5a-6$
$=-(a^2-5a+6)$
$=-(a-2)(a-3) \leq 0$
따라서 $(a-2)(a-3) \geq 0$이므로
$a \leq 2$ 또는 $a \geq 3 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a \geq 3$
따라서 a의 최솟값은 3

17. 이차부등식 $x^2+2ax+4a+5>0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때 이를 만족하는 정수 a의 값이 아닌 것은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

이차부등식 $x^2+2ax+4a+5>0$
이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로
$\frac{D}{4}=a^2-(4a+5)<0$
$a^2-4a-5<0$, $(a-5)(a+1)<0$
$\therefore -1<a<5$
따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3, 4이다.

18. 이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해가 $2<x<3$일 때, $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$2<x<3$ 가 해이므로

$(x-2)(x-3)<0$

$x^2-5x+6<0,\ a=-5, b=6$

$\therefore\ a+b=1$

19. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-2<x<1$일 때 부등식 $cx^2-bx-a>0$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $-2<x<1$ 이므로 $a<0$
해가 $-2<x<1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1)<0$,
즉 $x^2+x-2<0$ 양변에 a 를 곱하면
$ax^2+ax-2a>0$ 이 부등식이
$ax^2+bx+c>0$ 과 같으므로
$b=a, c=-2a \cdots$㈎
㈎를 $cx^2-bx-a>0$ 에 대입하면
$-2ax^2-ax-a>0$, $2x^2+x+1>0(\because -a>0)$
이 때 방정식 $2x^2+x+1=0$ 의 판별식
$D=1^2-4\cdot 2=-7<0$ 이므로
$2x^2+x+1>0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1,2,3,\cdots,9$ 의 9개이다.

20. $ax^2-2ax+3<0$를 만족하는 x가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a>0$ ② $-1<a<3$ ③ $0\le a\le 3$

④ $-1<a<4$ ⑤ $-1\le a\le 4$

해설

(i) $a=0$일 때, 성립한다.

(ii) $a\neq 0$일 때, 함수 $y=ax^2-2ax+3$에서 $D\le 0$이므로

$a^2-3a\le 0$

$\therefore 0<a\le 3(\because a\neq 0)$

21. 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \leq 0 \\ x^2 + 2x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

$x^2 - 2x + 1 \leq 0 \rightarrow (x-1)^2 \leq 0$

$(x-1)^2$ 은 항상 0 이상이므로

만족하는 해는 $x = 1$ 이 유일

$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$

$\rightarrow (x+1)^2 + 1 \geq 1$

$\therefore$ 모든 실수

$\therefore x = 1$

22. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x-4<0 \\ (x-a)(x+2)>0 \end{cases}$ 의 해가 $-2<x<1$이 될 때, 실수 a의 최댓값은?

① 0　② -2　③ -4　④ -6　⑤ -8

해설

$x^2+3x-4<0$의 해가
$-4<x<1$이므로
연립부등식의 해가 $-2<x<1$가 되려면
$(x-a)(x+2)>0$의 해는
$x<a, x>-2$이고, $a \le -4$이다.

23. 이차함수 $y=x^2-4ax+1$ 의 그래프가 직선 $y=2x-a$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있도록 하는 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a>0$　　② $-\frac{1}{4}<a<0$　　③ $-\frac{1}{4}<a<\frac{3}{4}$

④ $-\frac{3}{4}<a<\frac{1}{4}$　　⑤ $-\frac{3}{4}<a<0$

해설

$$\begin{cases} y=x^2-4ax+1 \\ y=2x-a \end{cases}$$

근이 존재하지 않아야 하므로

$2x-a=x^2-4ax+1$

$x^2+(-4a-2)x+(a+1)=0$

$D<0:\ (2a+1)^2-(a+1)<0$

$4a^2+3a=a(4a+3)<0$

$\therefore\ -\frac{3}{4}<a<0$

24. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1$, $a < 2$

ii) $f(1) > 0$, $1 - a + 9 > 0$, $a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$D = a^2 - 4 \cdot 9 \ge 0$, $a \ge 6$, $a \le -6$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \le -6$

$\therefore k = -6$

25. 두 부등식 $x^2-x-2>0$, $x^2-(a-3)x-3a<0$를 동시에 만족하는 정수가 -2뿐일 때, a의 값의 범위를 구하면 $m<a\le n$이다. mn의 값을 구하시오.

▶ 답 :

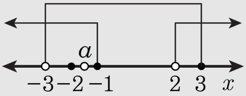
▷ 정답 : -6

해설

$x^2-x-2>0$에서 $x<-1$, $x>2$

$x^2-(a-3)x-3a<0$에서

$(x+3)(x-a)<0$



그림에서와 같이 동시에 만족하는

정수값이 -2뿐이려면 $-2<a\le 3$이다.

$\therefore\ -2<a\le 3$