1. 실수 x 에 대하여 $|x-2|^2-|3-x|^2-\sqrt{-9}+\sqrt{-16}$ 을 $a+bi$ 꼴로 나타낼 때 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -5　② $2x-4$　③ $2x$

④ $2x-5$　⑤ 0

해설

$$(\text{준식}) = (x-2)^2-(3-x)^2-3i+4i$$
$$= 2x-5+i$$
$$\therefore a=2x-5\ ,\ b=1$$
$$\therefore a+b=2x-4$$

2. 등식 $(x-2)+(2y+3)i=-7i$를 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x-2=0,\ 2y+3=-7$

$\therefore\ x=2,\ y=-5$

3. 복소수 $\dfrac{2+3i}{1-i}$ 를 $a+bi$ 꼴로 나타낼 때, $a+b$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\frac{2+3i}{1-i}=\frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-1+5i}{2}$$

$$\therefore\ a+b=\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}=2$$

4. 허수단위 i에 대하여 $i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$을 간단히하면?

① $1+i$ ② $-1+i$ ③ $2i$

④ $2+i$ ⑤ 2

해설

$$i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$$
$$=i+(-1)+(-i)+1+i+(-1)$$
$$=-1+i$$

5. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$ (2) $x^2-3\sqrt{2}x+6=0$

① (1) $\dfrac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$ ② (1) $\dfrac{3\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

③ (1) $\dfrac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{6}i}{2}$ ④ (1) $\dfrac{1\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

⑤ (1) $\dfrac{4\pm 3i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$

$\therefore\ 5x^2-8x+4=0$

$$\therefore\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{5}=\frac{4\pm 2i}{5}$$

(2) $$x=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-24}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$$

6. 이차방정식 $x^2+(a+2)x+1=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면

$D=(a+2)^2-4=0$이므로

$a^2+4a+4-4=a^2+4a=0$

따라서 $a=0$또는 $a=-4$

따라서 상수 a의 값의 합은 -4

7. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 실근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k < 1$　　② $k \leq 1$　　③ $k < 3$

④ $k \leq 3$　　⑤ $1 < k < 3$

해설

$3x^2 + 6x + k = 0,$

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 3 \cdot k \geq 0$$

$3k \leq 9 \quad \therefore\ k \leq 3$

8. 이차방정식 $x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8 ② -4 ③ -2 ④ 5 ⑤ 2

해설

$x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$

$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$

$(1-k)x^2 + 7x + 3 = 0$

(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로

x^2 의 계수는 $1 - k \neq 0$ 이어야 한다.

따라서 $k \neq 1$

(ii) 주어진 이차방정식이

허근을 갖기 위해서는

판별식 $D < 0$이어야 하므로

$D = 7^2 - 4 \cdot (1-k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$

$37 + 12k < 0$

$\therefore k < -\dfrac{37}{12}$

따라서 최대정수는 -4이다.

9. 이차방정식 $3x^2+6x-2=0$의 두 근을 α,β라고 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값은?

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{20}{3}$ ③ 7 ④ 20 ⑤ -12

해설

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=\frac{\sqrt{60}}{3}$$

$$\therefore \quad (\alpha-\beta)^2=|\alpha-\beta|^2=\frac{60}{9}=\frac{20}{3}$$

10. 이차방정식 $3x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\dfrac{4}{3}$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=8-3\times\dfrac{4}{3}\times 2=0$

11. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$\dfrac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$a^2 + b^2 = 5$

12. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x - 5$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned} y &= -3x^2 + 6x - 5 \\ &= -3(x^2 - 2x + 1 - 1) - 5 \\ &= -3(x - 1)^2 - 2 \end{aligned}$$

$x = 1$ 일 때, 최댓값 -2 를 갖는다.

13. $x = -2$ 일 때, 최댓값 3을 가지고, 점 $(0,\ -3)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y = -\frac{3}{2}(x-2)^2 + 3$

② $y = -\frac{3}{2}(x+2)^2 + 3$

③ $y = -\frac{2}{3}(x-2)^2 + 3$

④ $y = -\frac{2}{3}(x+2)^2 + 3$

⑤ $y = -2x^2 + 3$

해설

$x = -2$ 일 때, 최댓값 3을 가진다는 것은 그래프가 위로 볼록하고, $y = a(x+2)^2 + 3$ 의 형태임을 의미한다.
이 중 $(0,\ -3)$ 을 지나면,

$$-3 = 4a + 3$$
$$4a = -6$$
$$a = \frac{3}{2}$$
$$\therefore\ y = -\frac{3}{2}(x+2)^2 + 3$$

14. $-1 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x - 2a$ 의 최솟값이 1 일 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 4x - 2a = (x-2)^2 - 2a - 4$

이 때, 꼭짓점의 x 좌표 2 가 $-1 \le x \le 1$ 에 속하지 않으므로

$f(-1), f(1)$ 중 작은 값이 최솟값이다.

따라서, 최솟값은 $f(1) = -3 - 2a = 1$

$\therefore a = -2$

15. 이차방정식 $x^2-(k+1)x+k=0$ 의 두 근의 비가 $2:3$ 일 때, 상수 k 의 값들의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

두 근을 2α, 3α 라 하면

$2\alpha+3\alpha=k+1$, $(2\alpha)(3\alpha)=k$ 이므로,

$5\alpha=k+1$, $6\alpha^2=k$

이 두 식에서 α 를 소거하면

$6\left(\dfrac{k+1}{5}\right)^2=k$ 에서 $6k^2-13k+6=0$

$(2k-3)(3k-2)=0 \therefore\ k=\dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3}$

16. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$ 을 풀면?

① $x=-2$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{3}$

② $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-5$

③ $x=-2\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{6}$

④ $x=-3\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{6}i$

⑤ $x=-1$ 또는 $x=-5$ 또는 $-3\pm\sqrt{6}$

해설

$x(x+6)=x^2+6x$
$(x+2)(x+4)=x^2+6x+8$
$x^2+6x=X$ 로 놓으면
$x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$
$X(X+8)+15=0,$
$X^2+8X+15=0$
$(X+3)(X+5)=0$
$\therefore\ X=-3, X=-5$
㉠ : $X=-3 \Rightarrow\ x^2+6x+3=0,$
$x=-3\pm\sqrt{9-3}=-3\pm\sqrt{6}$
㉡ : $X=-5 \Rightarrow\ x^2+6x+5=0,$
$(x+5)(x+1)=0,\ x=-1,-5$

17. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+4=0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{3}i$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3+ax^2+bx+4=0$ 의 근 $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, \alpha$

세 근의 곱 : $\alpha(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=-4$

$\alpha(1+3)=-4$, $\alpha=-1$

세 근 : $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -1$

세 근의 합 : $1+\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i-1=-a$

$a=-1$

$b=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)+(-1)(1-\sqrt{3}i)$

$+(-1)(1+\sqrt{3}i)$

$=1+3-1+\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i=2$

$\therefore\ a+b=-1+2=1$

18. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3$,

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$ 에서

$3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$을 풀면 $x = 2(\mathrm{cm})$

19. 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 근이 유리수가 되는 k의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식D ≥ 0 이어야 한다.

$D=25-8k\geq 0$ 곧, $k\leq \dfrac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k=3,\ 2,\ 1,\ \cdots$ 이고,

이 중 $D\geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k=3$ 이다.

20. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x = 0$을 대입하면
$1 = 0$이 되어 모순이므로 $x \neq 0$이다.
따라서, 주어진 식의 양변을
x^2으로 나누면

$$x^2 + 5x - 12 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$$

여기서 $x + \frac{1}{x} = X$로 놓으면

$X^2 + 5X - 14 = 0,\ (X + 7)(X - 2) = 0$

$\therefore\ X = -7$ 또는 $X = 2$

(i) $X = -7$일 때,

$x + \frac{1}{x} = -7$에서

$x^2 + 7x + 1 = 0$

$$\therefore \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

(ii) $X = 2$일 때,

$x + \frac{1}{x} = 2$에서

$x^2 - 2x + 1 = 0,\ (x - 1)^2 = 0$

$\therefore\ x = 1$

(i), (ii)로부터

$x = 1$(중근) 또는 $x = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

따라서, 모든 근의 합은

$1 + \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2} + \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} = -6$이다.

21. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy-2y^2=8 \cdots\cdots ㉠ \\ xy+3y^2=1 \quad \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 근 x, y를 구할 때, $x+y$ 의 값을 모두 구하면?

① $-\frac{7}{2}, -1, 1, \frac{7}{2}$　② $-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}$　③ $-1, 1$
④ $-\frac{7}{2}, 1$　⑤ $1, \frac{7}{2}$

해설

㉠ − ㉡ × 8에서 $x^2-11xy-26y^2=0$, $(x+2y)(x-13y)=0$
$x+2y=0 \cdots\cdots$ ㉢
$x-13y=0 \cdots\cdots$ ㉣
㉡, ㉢에서 $y^2=1$
$\therefore\ y=\pm 1,\ x=\mp 2$(복호동순)
㉡, ㉣에서 $16y^2=1$
$\therefore\ y=\pm\frac{1}{4},\ x=\pm\frac{13}{4}$(복호동순)
$\therefore\ x+y=-1,\ 1,\ \frac{7}{2},\ -\frac{7}{2}$

22. $x,\ y$ 가 실수일 때, $f(x,\ y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$$\begin{aligned} f(x,\ y) &= x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y \\ &= x^2 - 2(y-1)x + 2y^2 + 2y \\ &= \{x - (y-1)\}^2 + (y+2)^2 - 5 \end{aligned}$$

따라서 $x = -3,\ y = -2$ 일 때, 최솟값 -5