1. 실수 k에 대하여 복소수 $z = 3(k+2i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 되도록 k의 값을 정하면?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = 3(k+2i) - k(-2i)$

$= 3k + (6+2k)i \Rightarrow$ 순허수

$\therefore\ 3k = 0,\ k = 0$

2. 등식 $(4+i)x+2+2yi=2+5i$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+2y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -5 ② -3 ③ 0 ④ 5 ⑤ 3

해설

$(4x+2)+(x+2y)i=2+5i$

$4x+2=2$, $x+2y=5$

3. $\dfrac{3+4i}{1+3i}$ 를 $a+bi$ 의 꼴로 나타 낼 때, $a-b$ 의 값은? (단, a , b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 2　　② -2　　③ 1　　④ -1　　⑤ 0

해설

분모의 실수화를 해준다.

$\dfrac{3+4i}{1+3i}=\dfrac{(3+4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$

$\therefore a-b=2$

4. 복소수에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 찾으면?

① $2+i$의 허수 부분은 $2i$ 이다.

② $-5i$는 순허수이다.

③ i^3 은 허수이다.

④ $1+\sqrt{3}i$의 켤레복소수는 $1-\sqrt{3}i$이다.

⑤ $1-\dfrac{1}{i}$는 실수이다.

해설

① $2+i$ 의 허수부분 : i (×)
② $-5i$ 는 순허수 (○)
③ $i^3=-i$ 허수(○)
④ $\overline{1+\sqrt{3}i}=1-\sqrt{3}i$ (○)
⑤ $1-\dfrac{1}{i}=1+i$ 복소수 (×)

5. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(m+a-1)x+m^2+a^2-2b=0$이 m의 값에 관계없이 중근을 갖는다. $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

중근을 가지므로, $\frac{D'}{4}=0$을 만족한다.

$\frac{D'}{4}=(m+a-1)^2-(m^2+a^2-2b)=0$

$m(2a-2)+(1-2a+2b)=0$

m에 대한 항등식이므로

$2a-2=0,\ 1-2a+2b=0$

$\therefore\ a=1,\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{3}{2}$

6. 이차방정식 $x^2+(m+1)x+m+4=0$이 중근을 가질 때, 모든 실수 m의 값의 합을 구하면?

① -3 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

중근을 가지므로, 판별식 $D=0$

$D=(m+1)^2-4\cdot1\cdot(m+4)=m^2-2m-15=0$

$(m-5)(m+3)=0 \quad \therefore\ m=-3,\ 5$

$\therefore\ m$의 값의 합은 $-3+5=2$

7. x에 대한 이차방정식 $kx^2+2(k+1)x+k=0$이 중근을 가질 때 k의 값은?

① $-\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ -1　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$\frac{D}{4}=b'^2-ac=(k+1)^2-k^2=2k+1$에서

중근을 가질 조건이므로

$\frac{D}{4}=0$이어야 한다.

$2k+1=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}$

8. 이차방정식 $ax^2 + 4x - 2 = 0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 a 값의 범위는?

① $a > -2$

② $-2 < a < 0,\ a > 0$

③ $-2 < a < 0$

④ $a > 2$

⑤ $a < 0,\ 0 < a < 2$

해설

$ax^2 + 4x - 2 = 0$에서

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $a \neq 0$이어야 한다.

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} > 0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 2^2 - (-2a) > 0,\ 2a + 4 > 0$$

$\therefore a > -2$

따라서 실수 a값의 범위는

$-2 < a < 0$ 또는 $a > 0$

9. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+b-3=0$ 이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=1, b=2$　② $a=0, b=3$　③ $a=-1, b=2$

④ $a=0, b=2$　⑤ $a=-1, b=3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.

$D'=(k-a)^2-(k^2+b-3)=0$

$\Rightarrow \quad -2ak+a^2-b+3=0$

모든 k 에 대해 성립하려면

$-2a=0,\ a^2-b+3=0$

$\therefore \quad a=0, b=3$

10. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$ 의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a=2+3$, $a=-5$

$b=2\cdot 3=6$

$\therefore\ -5x^2+6x+3=0$ 에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

11. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 점 $(1, 5)$ 를 지나고, $x = -1$ 일 때 최솟값 -3 을 가진다. 이 때, abc 의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$y = a(x+1)^2 - 3$ 에 $(1,\ 5)$ 를 대입하면 $a = 2$
따라서 $y = 2(x+1)^2 - 3$ 을 전개하면
$y = 2x^2 + 4x - 1$ 이므로 $a = 2,\ b = 4,\ c = -1$
$\therefore\ abc = -8$

12. 그래프의 모양이 $y=-2x^2$ 과 같고 $x=1$ 일 때 최댓값 5 를 갖는다. 이때, 이 함수의 식은?

① $y=-2x^2-4x+4$
② $y=-2x^2-4x+5$
③ $y=-2x^2+4x-3$
④ $y=-2x^2+4x+3$
⑤ $y=-2x^2-x+5$

해설

꼭짓점의 좌표가 (1, 5), x^2 의 계수가 -2 이므로

$$\begin{aligned} y &= -2(x-1)^2+5 \\ &= -2(x^2-2x+1)+5 \\ &= -2x^2+4x+3 \end{aligned}$$

$\therefore y=-2x^2+4x+3$

13. x의 범위가 $1 \le x \le 2$ 일 때, 함수 $y = x^2 - x - 1$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$y = x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ 이므로

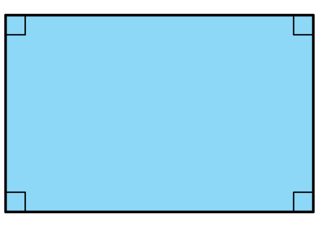
꼭짓점의 x 좌표 $\frac{1}{2}$ 이 x의 범위에 포함되지 않는다.

$x = 1$ 일 때, $y = -1$ (최솟값),

$x = 2$ 일 때, $y = 1$ (최댓값)

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 -1 이다.

14. 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 10 인 직사각형의 최대 넓이는?



① $\frac{25}{4}$ ② $\frac{25}{2}$ ③ 25 ④ 50 ⑤ 100

해설

두 변의 길이를 x , $10-x$, 넓이를 y 라 하면

$$
\begin{aligned}
y &= x(10-x) \\
&= -(x^2-10x) \\
&= -(x^2-10x+25-25) \\
&= -(x-5)^2+25
\end{aligned}
$$

$\therefore$ (최대 넓이) $= 25$

15. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\omega^3 = 1$ ② $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

③ $\omega^2 = \overline{\omega}$ ④ $\omega^2 + \omega = -1$

⑤ $1 + \omega^2 + \omega^4 = 1$

해설

① $\omega^3 = 1$(○)
② $\omega^2 + \omega + 1 = 0$(○)
③ $x^2 + x + 1 = 0$의 두 근이
$\omega, \overline{\omega}$이므로
$\omega + \overline{\omega} = -1$
$\overline{\omega} = -(1 + \omega) = -(-\omega^2) = \omega^2$
$\therefore \overline{\omega} = \omega^2$(○)
④ $\omega^2 + \omega = -1$(○)
⑤ $1 + \omega^2 + (\omega^3) \cdot \omega = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \neq 1$(×)

16. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답 : 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$

㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-1,\ -2$

$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

17. 방정식 $xy+2x=3y+10$을 만족하는 양의 정수가 $x=\alpha,\ y=\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

주어진 식을 변형하면

$xy+2x-3y=10,\ xy+2x-3y-6=4,$

$(x-3)(y+2)=4$

$y+2\geq 3$이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$x-3=1,\ y+2=4$

$\therefore\ x=4,\ y=2$

18. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\alpha+\beta, \alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $ax^2-bx+c=0$이 된다. 이 때, $\alpha^3+\beta^3$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$ax^2+bx+c=0$ 두 근이 α,β이므로,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$

$ax^2-bx+c=0$의 두 근이 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$이므로

$$\begin{cases} \text{두근의 합} : -\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{-b+c}{a}=\frac{b}{a} \\ \text{두근의 곱} : -\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}=\frac{c}{a} \end{cases}$$

$2b=c,\ a=-b,\ c=-2a$

$\alpha+\beta=-\frac{(-a)}{a}=1,\ \alpha\beta=\frac{-2a}{a}=-2$

$$\begin{aligned} \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= 1^3-3\cdot(-2)\cdot 1=1+6=7 \end{aligned}$$

19. 함수 $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{ax^2 - 3x + a - 2}}$ 이 최댓값을 가질 때, 정수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

분모가 항상 양수이므로 주어진 함수가 최대가 될 때는 함수 $y = ax^2 - 3x + a - 2 \cdots$ ㉠이 최솟값을 가질 때이다.
만약 함수 y 가 음수나 0 을 최솟값으로 갖게 되면 함숫값이 존재하지 않으므로 함수 y 의 최솟값은 양수이다.
따라서 $a > 0 \cdots$ ㉡
$D = -4a^2 + 8a + 9 < 0 \cdots$ ㉢ 의 두 식이 모두 만족되면, ㉠이 양의 최솟값을 갖는다.
$-4a^2 + 8a + 9 < 0$ 에서 $a < \dfrac{2 - \sqrt{13}}{2}$, $a > \dfrac{2 + \sqrt{13}}{2}$
따라서 ㉡과의 공통 범위를 구하면 $a > \dfrac{2 + \sqrt{13}}{2} = 2.80$ 이므로
$a = 3$ 이다.