1. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $i^4 = -1$

② $x^2 = -9$ 를 만족하는 실수는 존재하지 않는다.

③ $\sqrt{-27} = 3\sqrt{3}i$

④ $2 \in \{x \mid x\text{는 복소수}\}$

⑤ $a + bi$ 에서 $a = 0$ 이고 $b \neq 0$ 이면 순허수이다.(단, a, b 는 실수)

해설

$i^2 = -1 \quad \rightarrow \quad i^4 = 1$

2. 집합 $A = \{z \mid z = p(1-i) + q(1+i)\}$ 에 대하여 다음 중 집합 A 의 원소인 것은? (단, p, q 는 양의 실수)

① $-4-2i$ ② $-3+i$ ③ $-2+i$

④ $2+3i$ ⑤ $5-2i$

해설

$z = p(1-i) + q(1+i)$ 에서 $z = p+q+(-p+q)i$

① $p+q=-4$, $-p+q=-2$ 이므로

$p=-1,\ q=-3$

$\therefore\ -4-2i \notin A$

② $p+q=-3$, $-p+q=1$ 이므로

$p=-2,\ q=-1$

$\therefore -3+i \notin A$

③ $p+q=-2$, $-p+q=1$ 이므로

$p=-\frac{3}{2},\ q=-\frac{1}{2}$

$\therefore -2+i \notin A$

④ $p+q=2$, $-p+q=3$ 이므로

$p=-\frac{1}{2},\ q=\frac{3}{2}$

$\therefore 2+3i \notin A$

⑤ $p+q=5$, $-p+q=-2$ 이므로

$p=\frac{7}{2},\ q=\frac{3}{2}$

$\therefore 5-2i \in A$

3. $\dfrac{2-\sqrt{-5}}{2+\sqrt{-5}}$ 를 간단히 하면?

① $-\dfrac{1}{9}-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}i$　　② $\dfrac{1}{9}+\dfrac{4\sqrt{5}}{9}i$　　③ $1-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}i$

④ $1+4\sqrt{5}i$　　⑤ $-1-4\sqrt{5}i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{-5}}{2+\sqrt{-5}} &= \frac{2-\sqrt{5}i}{2+\sqrt{5}i}\times\frac{2-\sqrt{5}i}{2-\sqrt{5}i}\\ &= \frac{4-4\sqrt{5}i-5}{4+5}\\ &= -\frac{1}{9}-\frac{4\sqrt{5}}{9}i\end{aligned}$$

4. $\sqrt{(-1)^2} + i^2 - \frac{1}{i}$ 를 계산하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ $-i$ ⑤ i

해설

(준식)$= 1 - 1 + i = i$

5. 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + 1$ 의 최댓값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ -1　⑤ -2

해설

$$y = -2x^2 + 4x + 1$$
$$= -2(x-1)^2 + 3$$

$x = 1$ 일 때, 최댓값 3을 갖는다.

6. 다음 중 최솟값을 갖지 <u>않는</u> 것은?

① $y = 3x^2 + 4$

② $y = 2(x+4)^2 - 5$

③ $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 1$

④ $y = -x^2 + 3$

⑤ $y = x^2 + 2x + 1$

해설

이차항의 계수가 양수일 때 최솟값을 갖는다.

7. $2|x-1|+x-4=0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -2

해설

i) $x<1$일 때,

$-2(x-1)+(x-4)=0$

$\therefore x=-2$

ii) $x\geq 1$일 때,

$2(x-1)+x-4=0$

$\therefore x=2$

따라서 구하는 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이다.

8. 이차방정식 $x^2 - px + 2p + 1 = 0$이 중근을 갖도록 하는 실수 p의 값을 모두 곱하면?

① -8 ② -4 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$$D = p^2 - 4(2p+1)$$
$$= p^2 - 8p - 4 = 0$$

판별식으로부터 나온 p에 대한 방정식의 근들이 주어진 식이 중근을 갖게 하므로

실수 p 값들의 곱은 근과 계수의 관계에서 -4이다.

9. 이차식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4 = 0$
이 중근을 갖는다.

따라서, $\dfrac{D}{4} = (k-1)^2 - (2k^2 - 6k + 4) = 0$

위의 식을 정리하면
$-k^2 + 4k - 3 = 0$
$k^2 - 4k + 3 = 0$
$(k-1)(k-3) = 0$에서
$k = 1$ 또는 $k = 3$

10. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$의 값은?

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 20

해설

근과 계수와의 관계로부터

$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 1$

$\therefore \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= 27 - 9 = 18$

11. 이차식 $2x^2-4x+3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$a=2, b'=-2, c=3$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-6}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

12. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3 ② 0 ③ 2

④ 4 ⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$
근과 계수와의 관계에 의해
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입
$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$
계수가 유리수이므로
$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

13. $y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식은 $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2+5$ 이다. $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2+5 = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 2$

따라서 y 의 절편은 2 이다.

14. 함수 $f(x) = ax^2 - 2ax + b$가 $-2 \le x \le 2$에서 최댓값 5, 최솟값 -4를 가질 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이고 $a < 0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = ax^2 - 2ax + b$
$= a(x-1)^2 - a + b$ 에서 $a < 0$ 이고
꼭짓점의 x좌표 1이 $-2 \le x \le 2$에 속하므로
$x = 1$일 때 최댓값을 갖고,
$x = -2$일 때 최솟값을 갖는다.
즉, $f(1) = -a + b = 5$, $f(-2) = 8a + b = -4$
두 식을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 4$
$\therefore a + b = 3$

15. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.

$y = x(18-x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$

$y = -(x-9)^2 + 81$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

16. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + a + 1 = 0$의 두 근이 연속인 정수가 되게하는 상수 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 근을 n, $n+1$이라 하면

$$\begin{cases} n + (n+1) = a \cdots\cdots ㉠ \\ n(n+1) = a + 1 \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $n = \dfrac{a-1}{2} \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\frac{a-1}{2}\left(\frac{a-1}{2} + 1\right) = a + 1$$

이것을 정리하면 $(a+1)(a-5) = 0$

$a = -1,\ 5$

$\therefore -1 + 5 = 4$

17. $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라고 할 때, $(\omega^2+1)^4 + (\omega^2+1)^8$의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ ω ⑤ $-\omega$

해설

$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0,\ \omega^3 = 1$

$\Rightarrow (\omega^2+1)^4 + (\omega^2+1)^8 = (-\omega)^4 + (-\omega)^8$

$= \omega^3 \times \omega + (\omega^3)^2 \times \omega^2$

$= \omega^2 + \omega = -1$

18. $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y를 구하여 $x^2 - y^2$의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 또는 −12

해설

$$\begin{cases} x - y = 2 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 20 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y = x - 2$를

㉡식에 대입하면

$x^2 + (x - 2)^2 = 20$, $2x^2 - 4x + 4 - 20 = 0$,

$x^2 - 2x - 8 = 0$, $(x - 4)(x + 2) = 0$

$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$

$\therefore$ $x^2 - y^2 = 16 - 4 = 12$ 또는 $x^2 - y^2 = 4 - 16 = -12$

19. 사차방정식 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4+x^3+2x^2+x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 치환하면

$t^2+t=0$, $t(t+1)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=-1$

(ⅰ) $x+\frac{1}{x}=0$일 때, $x^2+1=0$

$\therefore x=\pm i$

(ⅱ) $x+\frac{1}{x}=-1$일 때,

$x^2+1=-x$, $x^2+x+1=0$

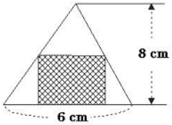
$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\pm i$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ (-i)+i+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-1$

20. 철민이는 그림과 같이 밑변의 길이가 $6\,\mathrm{cm}$, 높이가 $8\,\mathrm{cm}$ 인 삼각형 모양의 나무 판자를 가지고 있다. 이 판자를 그림과 같이 잘라 넓이가 $12\,\mathrm{cm}^2$ 인 직사각형 모양의 판자를 만들려고 한다. 이 때, 이 판자의 가로의 길이를 구하여 라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 3 cm

해설

삼각형에 내접하는 직사각형의 가로를 α , 세로를 β 라 하자.
닮음 조건에 의해 $\alpha : 8 - \beta = 3 : 4$
$\Rightarrow \quad 3\beta = 24 - 4\alpha,$
넓이가 12 이므로 $\alpha\beta = 12$

$$\therefore \ \alpha\beta = \alpha(8 - \frac{4}{3}\alpha) = 12, \ (\alpha - 3)^2 = 0$$

$$\therefore \ \alpha = 3$$

21. 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+cx^2+dx+1=0$이 한 실근과 두 허근 α, α^2을 가질 때, $c+d$의 값을 구하면?

① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

해설

$\alpha = a+bi$ (a, b는 실수, $b \neq 0$)라 놓으면 $\alpha^2 = a^2-b^2+2abi = a-bi$ ($\because$ 계수가 실수이므로 $\alpha^2=\overline{\alpha}$)

$\therefore \ a^2-b^2=a, \ 2ab=-b$ 에서 $a=-\dfrac{1}{2}, \ b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ 두 허근 $-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$를 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+x+1=0$

x^3의 계수, 상수항을 비교하면 한 실근은 -1

$x^3+cx^2+dx+1=(x^2+x+1)(x+1)=x^3+2x^2+2x+1$

$\therefore \ c=2, \ d=2$

$\therefore \ c+d=4$