1. $(\log_2 3 + 2\log_4 7)\log_{\sqrt[4]{21}} 8$의 값은?

① 4　② 6　③ 12　④ $4\log_2 3$　⑤ $6\log_2 5$

해설

밑의 변환 공식을 이용하여 밑을 같게 한 후 계산한다.

$$(\log_2 3 + 2\log_4 7)\log_{\sqrt[4]{21}} 8$$
$$= \left(\log_2 3 + 2\frac{\log_2 7}{\log_2 4}\right) \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 \sqrt[4]{21}}$$
$$= \left(\log_2 3 + 2\frac{\log_2 7}{\log_2 2^2}\right) \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 21^{\frac{1}{4}}}$$
$$= \left(\log_2 3 + 2\frac{\log_2 7}{2\log_2 2}\right) \cdot \frac{3\log_2 2}{\frac{1}{4}\log_2 21}$$
$$= (\log_2 3 + \log_2 7) \cdot \frac{12}{\log_2 21}$$
$$= \log_2 21 \cdot \frac{12}{\log_2 21} = 12$$

2. 상용로그 $\log 6.3$ 은 0.80 이고, $a = \log 6300$, $\log b = -1.20$ 일 때, $a + 10b$ 의 값은?

① 3.80 ② 4.04 ③ 4.28 ④ 4.32 ⑤ 4.43

해설

$a = \log 6300 = \log(1000 \times 6.3) = 3 + \log 6.3 = 3.80$ 이고
$\log b = -1.20 = -2 + 0.80 = \log 0.01 + \log 6.3$
$= \log 0.063$ 이므로 $b = 0.063$
$\therefore a + 10b = 3.80 + 0.63 = 4.43$

3. $\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ $\frac{3}{2}$　　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)$

$=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1)$

$=\log_{\sqrt{2}}2\sqrt{2}=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^{\frac{3}{2}}=3$

4. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\log_4(a+2b)+\log_4\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ 3

해설

$\log_4(a+2b)+\log_4\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$=\log_4(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$=\log_4\left(\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}+4\right)$

이때, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$\frac{a}{b}+\frac{4b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}=4$

따라서, 주어진 식의 최솟값은

$\log_4(4+4)=\log_4 8=\log_{2^2} 2^3=\frac{3}{2}$

5. 다음을 간단히 하여라.

$\log_2 \sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$ (단, $x > 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\log_2 \sqrt{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$

$= \log_2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$

$= \log_2 \{(x+1) - (x-1)\} = \log_2 2 = 1$

6. $\log_2 x + \log_2 y = \dfrac{3}{2}$ 을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여, $x+2y$의 최솟값을 m이라 하고 그때의 x, y의 값을 각각 a, b라 하자. 이때, $\dfrac{am}{b}$의 값은?

① $2^{\frac{5}{4}}$　② $2^{\frac{3}{2}}$　③ $2^{\frac{9}{4}}$　④ $2^{\frac{5}{2}}$　⑤ $2^{\frac{13}{4}}$

해설

$\log_2 x + \log_x y = \log_2 xy = \dfrac{3}{2}$ $\therefore xy = 2^{\frac{3}{2}}$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x + 2y \geq 2\sqrt{2xy} = 2\sqrt{2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{2^{\frac{5}{2}}} = 2 \cdot 2^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{9}{4}}$

따라서 $x+2y$의 최솟값은 $2^{\frac{9}{4}}$ 이다.

(단, 등호는 $x = 2^{\frac{5}{4}}, y = 2^{\frac{1}{4}}$ 일 때 성립한다.)

$a = 2^{\frac{5}{4}}, b = 2^{\frac{1}{4}}, m = 2^{\frac{9}{4}}$

$\dfrac{am}{b} = 2^{(\frac{5}{4}+\frac{9}{4})-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{13}{4}}$

7. $\log_2 \sqrt{7+\sqrt{24}}$의 소수 부분을 x라 할때, 2^{x+1} 의 값을 구하면?

① $\sqrt{3}+1$ ② $\sqrt{5}+1$ ③ $\sqrt{6}+1$
④ $\sqrt{7}+1$ ⑤ $2\sqrt{2}+1$

해설

$\log_2 \sqrt{7+\sqrt{24}}$
$=\log_2 \sqrt{7+2\sqrt{6}}$
$=\log_2(\sqrt{6}+1)$
$=\log_2(3.\times\times\times)$
$=1.\times\times\times$
따라서, $x=\log_2(\sqrt{6}+1)-1$
$2^{x+1}=2^{\log_2(\sqrt{6}+1)}=\sqrt{+}1$

8. 5^{40} 을 $a \times 10^{n}(1 < a < 10, n$ 은 정수) 의 꼴로 나타낼 때, $\log a$ 의 소수 부분을 다음 상용로그표를 이용하여 구한것은?

수	0	1	2	3
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284
2.2	0.3234	0.3444	0.3464	0.3483
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674
2.4	0.3802	0.3820	0.3888	0.3856

① 0.064 ② 0.18 ③ 0.408 ④ 0.84 ⑤ 0.96

해설

$5^{40} = a \times 10^{n}$ 에서 양변에 상용로그를 취하면

$\log 5^{40} = \log(a \times 10^{40}) = n + \log a \cdots$ ㉠

$1 < a < 10$ 이므로 $0 < \log a < 1$ 이다.

$$\begin{aligned}\log 5^{40} &= 40 \log 5 = 40 \times (1 - \log 2)\\ &= 40 \times 0.6990\\ &= 27.96\end{aligned}$$

이므로 ㉠에서 $n = 27, \log a = 0.96$

따라서 $\log a$ 의 소수 부분은 0.96 이다.

9. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.141}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답:

▷ 정답: 0.7164

해설

상용로그표에서 $\log 1.41 = 0.1492$ 이므로

$$\log \sqrt[3]{0.141} = \frac{1}{3}\log 0.141 = \frac{1}{3}\log(1.41 \times 10^{-1})$$
$$= \frac{1}{3}(\log 1.41 - 1) = \frac{1}{3}(0.1492 - 1)$$
$$= -0.2836 = -1 + 0.7164$$

따라서 $\log \sqrt[3]{0.141}$ 의 소수 부분은 0.7164 이다.

10. $\log \frac{1}{A^2}$ 의 정수 부분이 -3 인 자연수 A 의 개수는? (단, $\sqrt{10} = 3.16$ 으로 계산한다.)

① 15개　② 18개　③ 21개　④ 24개　⑤ 27개

해설

$\log \frac{1}{A^2}$ 의 정수 부분이 3이므로

$-3 \le \log \frac{1}{A^2} < -2$, $-3 \le -2\log A < -2$

$1 < \log A \le \frac{3}{2}$, $\log 10 < \log A \le \log 10^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ 10 < A \le 10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10} = 31.6$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $31 - 10 = 21$(개)

11. 두 양수 A, $\dfrac{1}{A}$의 상용로그의 소수 부분을 각각 α, β라고 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\log A$ 이 정수 부분을 n 이라고 하면 $\log A = \alpha + n$

$\log \dfrac{1}{A} = \log A^{-1} = -\log A$

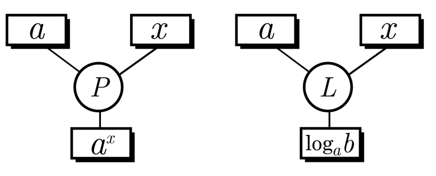
$= -(n+\alpha) = -n-\alpha$

$= (-n-1) + (1-\alpha)$

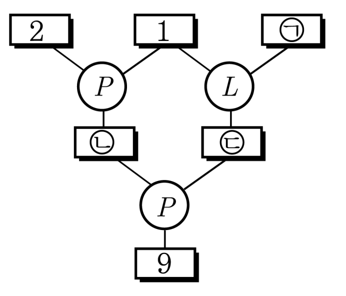
따라서 $\log \dfrac{1}{A}$ 의 소수 부분은 $1-\alpha$ 이므로 $\beta = 1-\alpha$

$\therefore \alpha + \beta = \alpha + (1-\alpha) = 1$

12. a^x과 $\log_a x$를 다음과 같이 나타내었다.



이때, 다음의 ㉠에 알맞은 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$㉡ = 2^4$ $㉢ = \log_4^{㉠}$

$㉡^{㉢} = 9$

$16^{\log_4^{㉠}} = 9$

$㉠^{\log_4^{16}} = 9$

$㉠^2 = 9$

$㉠ = 3$

13. 1이 아닌 세 자연수 x, y, z가 다음 두 식을 만족한다.

㉠ $\log_y z + \log_z x + \log_x y = \frac{5}{3}$
㉡ $\log_y z \log_z x + \log_z x \log_x y + \log_x y \log_y z = \frac{5}{3}$

이때, $(\log_y z)^2 + (\log_z x)^2 + (\log_x y)^2$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{20}{9}$ ② $-\frac{11}{9}$ ③ $-\frac{5}{9}$ ④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ 1

해설

$\log_y z = A, \log_z x = B, \log_x y = C$ 라 하면

$\log_z y = \frac{1}{A}, \log_x z = \frac{1}{B}, \log_y x = \frac{1}{C}$ 이므로

$A + B + C = \frac{5}{3}$ 에서 $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{AB + BC + CA}{ABC}$

이므로 $AB + BC + CA = \frac{5}{3}$

$\therefore\ (\log_z y)^2 + (\log_z x)^2 + (\log_x y)^2$

$= A^2 + B^2 + C^2$

$= (A + B + C)^2 - 2(AB + BC + CA)$

$= \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{5}{3} = \frac{25}{9} - \frac{10}{3} = -\frac{5}{9}$

14. 실수 a에 관계없이 로그가 정의될 수 있는 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\log_{a^2+1}(a^2+a+1)$　　㉡ $\log_{2|a|+2}(a^2+2a+1)$

㉢ $\log_{a^2+2}(a^2+2a+3)$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ [반례] 밑의 조건에서 $a=0$일 때, 성립하지 않는다.

㉡ [반례] $a=-1$일 때, 진수 $a^2+2a+1=0$이므로 로그를 정의할 수 없다.

㉢ 진수 $a^2+2a+3=(a+1)^2+2>0$이고, 밑 $a^2+2\geq 2$이므로 로그가 항상 정의된다. 따라서, ㄷ만 옳다.

15. 다음은 $\log_m n$ 이 무리수임을 이용하여 $\log_{m^2} m^3 n$ 도 무리수임을 증명한 것이다.

> $\log_m n = s$(s는 [(가)])로 놓고
> $\log_{m^2} m^3 n$이 유리수라고 하자.
> $\log_{m^2} m^3 n = \dfrac{\log_m m^3 n}{\log_m m^2} = \dfrac{1}{2}$[(나)]
> 이때, $\log_{m^2} m^3 n = t$(t는 유리수)라 하면
> $2t - 3 = s$
> 이것은 [(다)]가 되어 모순이다.
> 따라서, $\log_{m^2} m^3 n$은 무리수이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① 유리수, $2s$, (유리수)=(무리수)

② 유리수, $1 + 2s$, (짝수)=(홀수)

③ 유리수, $2 + s$, (유리수)=(무리수)

④ 무리수, $2s$, (짝수)=(홀수)

⑤ 무리수, $3 + s$, (유리수)=(무리수)

해설

$\log_m n = s$(s는 [무리수])로 놓고
$\log_{m^2} m^3 n$이 유리수라고 하자.
$\log_{m^2} m^3 n = \dfrac{\log_m m^3 n}{\log_m m^2} = \dfrac{1}{2}[(3 + s)]$
이때, $\log_{m^2} m^3 n = t$(t는 유리수)라 하면
$2t - 3 = s$
이것은 [(유리수)=(무리수)]가 되어 모순이다.
따라서, $\log_{m^2} m^3 n$은 무리수이다.