1. 함수 $y = -x^2 + kx$의 그래프가 직선 $y = -x + 4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1　　② $\frac{3}{2}$　　③ 2　　④ $\frac{5}{2}$　　⑤ 3

해설

$y = -x^2 + kx$가 $y = -x + 4$에 접하려면
$4 - x = -x^2 + kx \Rightarrow x^2 - (k+1)x + 4 = 0$의 판별식은 $D = 0$이어야 한다.
$D = (k+1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow k + 1 = \pm 4$
$\therefore k = 3 \ (\because k > 0)$

2. 이차함수 $y = \frac{3}{2}x^2 + 6x - 3$ 은 $x = a$ 일 때, 최솟값 b 를 갖는다고 한다. $a - b$ 의 값을 구하면?

① -8 ② -5 ③ 3 ④ 7 ⑤ 11

해설

$y = \frac{3}{2}(x^2 + 4x) - 3 = \frac{3}{2}(x + 2)^2 - 9$ 에서
$a = -2$, $b = -9$
그러므로 $a - b = 7$ 이다.

3. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$
② $a = 1$
③ $a = \pm 1$
④ $a \neq \pm 1$인 모든 실수
⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore$ $a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a의 값은 $a \neq \pm 1$인 모든 실수이다.

4. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$ 또는 $x=r,\ y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

5. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x + y$ 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ 에서

$(x-y)(x-2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

ⅰ) $x = y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2,\ y = \pm 2$

ⅱ) $x = 2y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2},\quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

6. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots$ ㉠
$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3$, $xy=2$
$\therefore \quad ab=2$

7. 이차함수 $y = a(x+b)^2 + 4$ 에서 x 축의 방향으로 3 , y 축의 방향으로 2 만큼 움직였을 때 최솟값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$y = a(x+b)^2 + 4$ 에서 $a > 0$ 이므로 꼭짓점에서 최솟값을 갖는다.
x축의 방향의 이동에 상관없이 y축의 방향의 이동만 고려하면 되므로
$4 + 2 = 6$

8. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + m + 10$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 , y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동하였더니 최솟값이 5 가 되었다. 이 때, 상수 m 의 값을 구하면?

① -16　② -10　③ -6　④ 2　⑤ 8

해설

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + m + 10$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4 - 4) + m + 10$$
$$= \frac{1}{2}(x-2)^2 + 8 + m$$

x 축의 방향으로 1 만큼 , y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 식은

$$y = \frac{1}{2}(x-2-1)^2 + 8 + m + 3 = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 11 + m$$

최솟값이 5 이므로 $11 + m = 5$ 에서 $m = -6$ 이다.

9. $y = x^2 - 2|x| + 2(-1 \le x \le 3)$ 의 최댓값, 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M + m$ 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2|x| + 2(-1 \le x \le 3)$ 에서

(i) $-1 \le x < 0$ 일 때,
$y = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$
(ii) $0 < x \le 3$ 일 때,
$y = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ 이므로
$\therefore\ M = 5,\ m = 1 \quad \therefore\ M + m = 5 + 1 = 6$

10. $-1 \le x \le 1$ 에서 함수 $y = (x^2 - 2x + 2)^2 - 4(x^2 - 2x + 2) + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은?

① 18 ② 9 ③ 7 ④ -9 ⑤ -18

해설

$(x^2 - 2x + 2) = t$ 로 치환하면,
$t^2 - 4t + 1 = (t-2)^2 - 3$.
t의 범위는 x 에 의해 $1 \le t \le 5$ 가 된다.

$$\begin{cases} t = 2\text{일때},\ y = -3 \\ t = 5\text{일때},\ y = 6 \end{cases}$$

$\therefore\ M \times m = -18$

11. 차가 4 인 두 수 중에서 그 제곱의 합이 최소가 되는 두 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

▷ 정답 : 2

해설

두 수를 각각 $x,\ x+4$ 라 하면

$y = x^2 + (x+4)^2$

$= 2x^2 + 8x + 16$

$= 2(x+2)^2 + 8$

$x = -2$ 일 때, 최솟값 8 을 갖는다.

$\therefore x = -2,\ x+4 = 2$

따라서 구하는 두 수는 $-2, 2$

12. 이차함수 $y = x^2 - 16$ 의 그래프에서 x 축과의 교점을 A, B 라 하고 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.

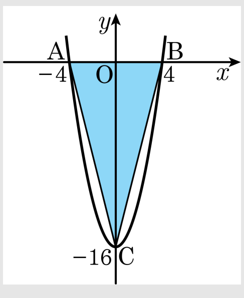
▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

x 축과의 교점A, B 는 $x^2 - 16 = 0$ 의 근과 같다.
따라서 $x = \pm 4$ 이다.

꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -16)$ 이다.



구하는 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times 16 = 64$ 이다.

13. 지면으로부터 30m 높이의 건물 옥상에서 초속 20m 로 똑바로 위로 던져 올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 $y = -5x^2 + 20x + 30$ 의 관계가 성립한다. 이 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답: 초

▶ 답: m

▷ 정답: 2초

▷ 정답: 50m

해설

$y = -5x^2 + 20x + 30$ 에서 $y = -5(x-2)^2 + 50$ 이다.
따라서 $x = 2$ 일 때, y 는 최댓값 50 을 갖는다.

14. 0이 아닌 실수 x, y 가 $(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$을 만족할 때, x에 관한 이 방정식은 실수 a에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. $(a \neq 0)$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 1

▷ 정답: −1

해설

$(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$에서

$x^2y^2+4a^2x^2+y^2+4a^2-8axy=0$

$(x^2y^2-4axy+4a^2)+(y^2-4axy+4a^2x^2)=0$

$(xy-2a)^2+(y-2ax)^2=0$

$xy-2a$, $y-2ax$는 실수이므로

$xy-2a=0$, $y-2ax=0$

$\therefore\ xy=2a$, $y=2ax$

두 식을 연립하면, $2ax^2=2a$

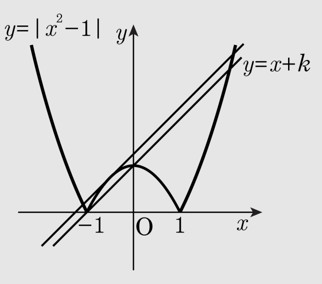
$(a \neq 0)$이므로 $x^2=1$, $x=\pm 1$

15. x에 관한 방정식 $|x^2-1|-x-k=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k의 값의 범위를 구하면?

① $1<k<\frac{5}{4}$　② $1 \le k \le \frac{5}{4}$　③ $-5<k<-\frac{5}{4}$
④ $k<1,\ k>\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{4}{5}<k<1$

해설

$|x^2-1|-x-k=0$을 변형하여 분리하면
$|x^2-1|=x+k$, $y=|x^2-1|$, $y=x+k$
이 두 함수가 4개의 교점을 가지려면
다음그림과 같아야 한다.



$y=-x^2+1$,　$y=x+k$가
두 점에서 만나야하므로
$x^2+x+k-1=0$의 판별식 $D>0$이어야 한다.
$D=1-4k+4>0$　$\therefore\ k<\frac{5}{4}$
또, 직선 $y=x+k$는 점 $(-1,0)$을 지나는 직선 위에 존재해야 하므로
$0<-1+k$　$\therefore\ k>1$
$\therefore\ 1<k<\frac{5}{4}$

16. $y = x^2 + 2ax + a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{1}{4}$

해설

$y = x^2 + 2ax + a = (x + a)^2 - a^2 + a$

최솟값은 $-a^2 + a$ 이다.

즉, $m = -a^2 + a = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ 이다.

$\therefore a = \frac{1}{2}$ 일 때, m 은 최댓값 $\frac{1}{4}$ 을 갖는다.

17. 방정식 $x^4+Ax^3-7x^2-Ax+3B=0$의 두 근이 -1과 -2일 때, 다른 두 근을 α,β라 하자. 이 때, $A+B-\alpha\beta$의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)=x^4+Ax^3-7x^2-Ax+3B$라 하면 $-1,-2$가 근이므로
$f(-1)=1-A-7+A+3B=0$
$\therefore\ B=2$
$f(-2)=16-8A-28+2A+3B=0,\ -6A+3B-12=0\quad\therefore\ A=-1$
$\therefore\ A+B=-1+2=1\cdots\cdots$ ㉠
$\therefore\ (x+1)(x+2)(x^2-4x+3)=0$
따라서, 다른 두 근은 $x^2-4x+3=0$의 근이다.
$\therefore\ \alpha\beta=3\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $A+B-\alpha\beta=1-3=-2$

18. 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{21}$ (단, $x<y$)을 만족하는 양의 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)에 대하여 $x+y$의 최댓값을 구하면?

① 484　　② 192　　③ 112　　④ 100　　⑤ 548

해설

$21(x+y)=xy,\quad xy-21(x+y)=0$
$\therefore\ (x-21)(y-21)=21^2=3^2\times 7^2$
$21x=(x-21)y$이고 $y>x>0$이므로
$y-21>x-21>0$
$\therefore (x-21,\ y-21)$
$\quad =(1,\ 441),\ (3,\ 147),\ (7,\ 63),\ (9,\ 49)$
$\therefore (x,\ y)$
$\quad =(22,\ 462),\ (24,\ 168),\ (28,\ 84),\ (30,\ 70)$
$\therefore\ x+y$의 최댓값은 $22+462=484$

19. x에 관한 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 해를 $\alpha,\ \beta$라고 할 때, 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 $f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta,\ f(\alpha+\beta)=\alpha+\beta,\ f(0)=-1$을 만족한다. 이 때 $ab+cd$의 값은?

① -5　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 5

해설

$x^2-x+1=0$의 두 근 : $\alpha,\ \beta,$

$\alpha+\beta=1\ ,\ \alpha\beta=1$

$f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta,$

$f(\alpha+\beta)=\alpha+\beta$이므로

$f(x)-x=a(x-\alpha)(x-\beta)\left\{x-(\alpha+\beta)\right\}$

$f(0)=-1\Rightarrow -1=-a\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\therefore a=1(\because \alpha\beta=1, \alpha+\beta=1)$

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-1)+x$

$(\because\ \alpha+\beta=1)$

$f(x)=x^3-(\alpha+\beta+1)x^2+(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)x-\alpha\beta$

$f(x)=x^3-2x^2+3x-1$

$\Leftrightarrow f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$a=1, b=-2, c=3, d=-1$

$\therefore\ ab+cd=-2-3=-5$

20. α, β를 $x^2 + x + 1 = 0$의 두 근이라 하고 $P(n) = \alpha^n + \beta^n$라 할 때, $P(3n) + P(n) + P(n-1) + P(n-2)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^2 + x + 1 = 0,$
$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0$
$\therefore \alpha^3 = 1,\ \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$
따라서 $n \geq 2$인 모든 정수에 대해
$\alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} = 0$이고,
β에 대해서도 마찬가지이다.
$P(3n) + P(n) + P(n-1) + P(n-2)$
$= (\alpha^{3n} + \beta^{3n}) + (\alpha^n + \beta^n)$
$+(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1)} + (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2})$
$= (1+1) + (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2})$
$+(\beta^n + \beta^{n-1} + \beta^{n-2})$
$= 2 + 0 + 0 = 2$