1. 이차함수 $y = 2x^2 + kx - k$ 의 그래프가 x축과 만나도록 하는 상수 k의 값이 아닌 것은?

① -8 ② -1 ③ 0 ④ 5 ⑤ 8

해설

이차방정식 $2x^2 + kx - k = 0$에서 $D = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) \geq 0$이어야 하므로

$k^2 + 8k \geq 0,\ k(k+8) \geq 0$

$\therefore k \leq -8$ 또는 $k \geq 0$

따라서 위의 k의 값의 범위에 속하지 않는 것은 ②이다.

2. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k < 1$
② $1 < k < 3$
③ $k < 3$
④ $3 < k < 5$
⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

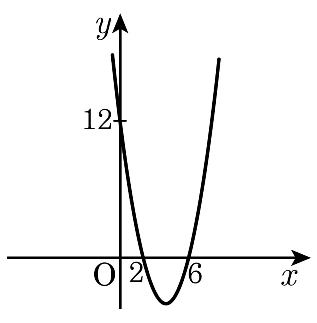
이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$$

$k^2 - 6k + 5 > 0,\ \ (k-1)(k-5) > 0$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

3. 다음은 이차함수 $y=(x-2)(x-6)$ 의 그래프이다.



이 이차함수가 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차방정식 $(x-2)(x-6)=0$ 에서 $x=2$ 또는 $x=6$
따라서 $A(2,\ 0)$, $B(6,\ 0)$ 이므로 $\overline{AB}=4$

4. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2,\ k < -1$ ② $k > 3,\ k < -1$ ③ $k > 1,\ k < -1$
④ $k > 3,\ k < -2$ ⑤ $k > 3,\ k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로
$-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1 - k)x + 1 = 0$ 에서
$\mathrm{D} = (1 - \mathrm{k})^2 - 4 > 0$
$k^2 - 2k - 3 = (k - 3)(k + 1) > 0$
$\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

5. 이차함수 $y = 12x - (1+3x)(1-3x)$ 가 $x = p$ 에서 최소이고 최솟값은 q 일 때, $p+q$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{17}{3}$ ② $-\frac{5}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$y = 12x - (1+3x)(1-3x) = 9x^2 + 12x - 1$

$= 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 5 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$

따라서, $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최소이고

최솟값은 -5 이므로

$p = -\frac{2}{3}$, $q = -5$

$\therefore p + q = -\frac{17}{3}$

6. 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최솟값을 구하면?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ $\frac{1}{2}$　　⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ 에서
$x = 1$ 일 때 최소이며 최솟값은 $f(1) = 1$

7. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = x^2 - 2x - 3\ (0 \le x \le 4)$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 5

▷ 정답 : 최솟값 -4

해설

먼저, 주어진 식을 $y = a(x-m)^2 + n$의 꼴로 변형하여그래프를 그린 다음 주어진 구간 안에서 가장 높은 점과 가장 낮은 점을 조사한다.

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$

꼭짓점 : $x = 1$ 일 때 $y = -4$

양끝점 : $\begin{cases} x = 0 \text{ 일 때 } y = -3 \\ x = 4 \text{ 일 때 } y = 5 \end{cases}$

$x = 4$에서 최댓값 5 , $x = 1$에서 최솟값 -4

8. 이차함수$y = -2 + 3x - x^2$ $(-1 \le x \le 2)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $-\frac{23}{4}$　② $-\frac{16}{3}$　③ $-\frac{3}{4}$　④ $\frac{7}{4}$　⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$y = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}$ 이므로

$x = \frac{3}{2}$ 가 x의 값의 범위 $-1 \le x \le 2$ 에 포함되므로

$x = \frac{3}{2}$ 에서 최솟값 $\frac{1}{4}$ 를 갖고,

$x = -1$ 에서 최댓값 -6을 갖는다.

따라서 최솟값과 최댓값의 합은 $-\frac{23}{4}$ 이다.

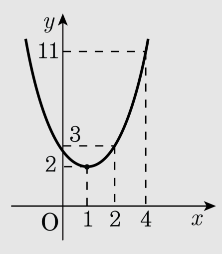
9. $2 \leq x \leq 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

따라서 함수의 그래프는 점$(1, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이므로



(i) $x = 2$ 일 때 최소이며, 최솟값은 $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$

$\therefore\ m = 3$

(ii) $x = 4$ 일 때 최대이며, 최댓값은 $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$

$\therefore\ M = 11$

$\therefore\ M + m = 14$

10. 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3$ $(0 \le x \le 3)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -4　　② -3　　③ -2　　④ -1　　⑤ 0

해설

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ 에서
$x = 1$ 일 때 최솟값 : -4,
$x = 3$ 일 때 최댓값 : 0
최댓값 + 최솟값 $= -4$

11. $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9　　② 10　　③ 11　　④ 12　　⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면
$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x-1)^2 + 1$
따라서 함수 $f(x)$ 는 점$(1,1)$ 을 꼭지점으로 하는
아래로 볼록한 포물선이다.
그러므로 $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서
최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,
최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

12. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = -x^2 + 4x \ (1 \le x \le 5)$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 4

▷ 정답 : 최솟값 −5

해설

$y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$

꼭짓점 : $x = 2$ 일 때 $y = 4$

양끝점 : $\begin{cases} x = 1 \text{ 일 때 } y = 3 \\ x = 5 \text{ 일 때 } y = -5 \end{cases}$

$x = 2$ 에서 최댓값 4

$x = 5$ 에서 최솟값 −5

13. $-2 \le x \le 3$에서 $y = x^2 - 2x - 2$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 3 ② 7 ③ -2 ④ 0 ⑤ 1

해설

$y = (x-1)^2 - 3$이고 꼭짓점의 x좌표가 주어진 x의 범위에 포함되므로
$x = 1$에서 최솟값을 $x = -2$에서 최댓값을 갖는다.
(최댓값)$=(-2)^2 - 2(-2) - 2 = 6$
(최솟값)$=-3$

14. 이차함수 $y = -x^2 - 2x + 7(-3 \le x \le 1)$의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, $a + b$의 값을 구하면?

① 4 ② 7 ③ 8 ④ 11 ⑤ 12

해설

$y = -x^2 - 2x + 7 = -(x+1)^2 + 8$이므로
꼭짓점의 좌표는 $(-1, 8)$이고, 위로 볼록한 포물선이다.
주어진 구간의 양 끝값을 구하면,
$x = -3$일 때 $y = -(-3+1)^2 + 8 = 4$
$x = 1$일 때 $y = -(1+1)^2 + 8 = 4$이다.
따라서 최댓값 $a = 8$이고, 최솟값 $b = 4$이므로 $a + b = 12$

15. x 의 범위가 $-3 \leq x \leq 2$ 일 때, 이차함수 $y = x^2 - 2x - 1$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$

$\Rightarrow m : x = 1$ 일 때 : -2,

$M : x = -3$ 일 때 : 14

$\therefore m + M = 12$

16. x의 범위가 $-2 \le x \le 3$일 때, 함수 $f(x) = x^2 + 2x + C$ 의 최소값이 4가 되도록 상수 C 의 값을 정할 때, 함수 $f(x)$ 의 최대값은?

① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

해설

$f(x) = (x+1)^2 + C - 1$
주어진 범위에서 $x = -1$ 일 때
최소값을 가지므로
$f(-1) = C - 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad C = 5$
$\Rightarrow \quad f(x) = (x+1)^2 + 4$
주어진 범위에서 $x = 3$ 일 때 최대값을 가진다.
$\Rightarrow \quad f(3) = 4^2 + 4 = 20$

17. 이차함수 $y = 2x^2 - 6x + 5(2 \le x \le 5)$ 의 최댓값을 a, 최솟값을 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면?

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

해설

$y = 2x^2 - 6x + 5 = 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 5$

$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ 이므로

꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이고

아래로 볼록한 포물선이다.
꼭짓점이 주어진 구간 안에 포함되지 않으므로 최댓값, 최솟값은 주어진 구간의 양끝값이 된다.

$x = 2$ 일 때 $y = 2\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 1$

$x = 5$ 일 때 $y = 2\left(5 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 25$

따라서 최댓값 $a = 25$ 이고, 최솟값 $b = 1$ 이므로 $ab = 25$

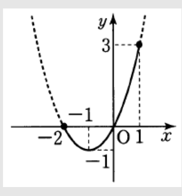
18. $-2 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, $-2 \le x \le 1$ 에서
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.
즉, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$
따라서, $x = 1$ 일 때 최댓값 3,
$x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로
구하는 합은 $3 - 1 = 2$



19. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x-2)(x-6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2 \therefore\ a + b = 14$

20. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$a^2 + b^2 = 5$

21. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 점 $(1, 5)$ 를 지나고, $x = -1$ 일 때 최솟값 -3 을 가진다. 이 때, abc 의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$y = a(x+1)^2 - 3$ 에 $(1,\ 5)$ 를 대입하면 $a = 2$
따라서 $y = 2(x+1)^2 - 3$ 을 전개하면
$y = 2x^2 + 4x - 1$ 이므로 $a = 2,\ b = 4,\ c = -1$
$\therefore\ abc = -8$

22. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x = -1$ 에서 최댓값 7 을 갖고, $f(2) = -2$ 를 만족할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 3　② 7　③ 11　④ -3　⑤ -5

해설

$f(x) = a(x+1)^2 + 7, f(2) = -2$
$\Rightarrow 3^2 \times a + 7 = -2, a = -1$
$\therefore\ f(x) = -(x+1)^2 + 7 = -x^2 - 2x + 6$
따라서 $a + b + c = 3$

23. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x+1)^2 + k + 3$ 이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k+3)$ 이다.
주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.
$\therefore\ k + 3 = \frac{5}{2} \quad \therefore\ k = -\frac{1}{2}$

24. 함수 $y = \dfrac{6}{x^2 - 2x + 4}$ 의 최댓값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 > 0$ 이므로
분모가 최소가 될 때 y 가 최대이다.
$\therefore$ $x = 1$ 일 때 최댓값 $\dfrac{6}{3} = 2$

25. 함수 $y=-x^2-2x+5\ (-2 \le x \le 2\ )$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 을 구하여라.

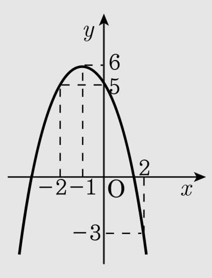
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y=-x^2-2x+5=-\left(x^2+2x+1-1\right)+5=-(x+1)^2+6$

점$(-1,6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.



$f(-2)=5, f(2)=-3$

따라서 최댓값은 $x=-1$ 일 때 $f(-1)=6$ 이며

최솟값은 $x=2$ 일 때 $f(2)=-3$ 이다.

$\therefore\ M+m=6-3=3$

26. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x - 2a$ 의 최솟값이 1 일 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

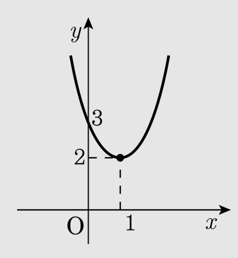
$f(x) = x^2 - 4x - 2a = (x-2)^2 - 2a - 4$
이 때, 꼭짓점의 x 좌표 2 가 $-1 \leq x \leq 1$ 에 속하지 않으므로
$f(-1), f(1)$ 중 작은 값이 최솟값이다.
따라서, 최솟값은 $f(1) = -3 - 2a = 1$
$\therefore a = -2$

27. 함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 x의 범위가 $0 < x < 1$ 일 때, 이 함수의 함숫값의 범위을 구하면?

① $-2 < y < 3$ ② $-2 < y < 2$ ③ $0 < y < 3$
④ $0 < y < 2$ ⑤ $2 < y < 3$

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$
따라서 함수의 그래프는 다음의 그림과 같다.
$f(0) = 3,\ f(1) = 2$ 이므로
함숫값의 범위은 $2 < y < 3$



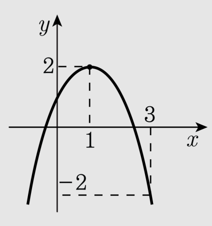
28. x의 범위가 $0 \le x \le 3$ 일 때, 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 1$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$y = -x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2$
이므로 오른쪽 그림에서 주어진 이차함수는 $x = 1$ 일 때, 최댓값 2, $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2를 가짐을 알 수 있다.
$\therefore\ M + m = 2 + (-2) = 0$



29. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x의 범위가 $-2 \le x \le 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 6 ⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow \quad y = (x-1)^2 - 3$
$-2 \le x \le 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,
$x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.
$\therefore$ 최댓값 : $(-2-1)^2 - 3 = 6$

30. 포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$과 x축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, 모든 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는
이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 두 근이므로 두 근을 α, β
라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = 2k,\ \alpha\beta = 2k + 3$
$|\alpha - \beta| = 2\sqrt{5}$에서 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$이므로
$20 = (2k)^2 - 4(2k + 3),\ 4k^2 - 8k - 12 = 20$

$k^2 - 2k - 8 = 0$
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 2이다.

31. 이차함수 $y = x^2 + 2x + k$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$일 때, 상수 k의 값은?

① -8　　② -7　　③ -6　　④ -5　　⑤ -4

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x + k$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha < \beta)$라고 하면 α, β는 이차방정식 $x^2 + 2x + k = 0$의 두 실근이다.
이 때, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -2$, $\alpha\beta = k$이고
x축 위의 두 교점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 이므로 $\beta - \alpha = 4\sqrt{2}$

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$에서 $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = (-2)^2 - 4k$, $32 = 4 - 4k$
$\therefore k = -7$

32. 이차함수 $y=x^2-2(k-1)x+9$의 그래프가 x축과 만나지 않기 위한 정수 k의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

이차함수 $y=x^2-2(k-1)x+9$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면
이차방정식 $y=x^2-2(k-1)x+9=0$의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-9<0$

$k^2-2k-8<0$, $(k+2)(k-4)<0$

$\therefore -2<k<4$

따라서, k값 중 정수인 것은 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

33. 직선 $y = x + 4$에 평행하고, 곡선 $y = -x^2 + 2$에 접하는 직선의 방정식은?

① $4x + 4y = 9$　　② $4x - 4y = 9$　　③ $-4x + 4y = 9$
④ $-4x - 4y = 5$　　⑤ $-4x - 4y = -5$

해설

직선 $y = x + 4$에 평행한 직선의 방정식을 $y = x + k$라 하면
이차방정식 $x + k = -x^2 + 2$,
즉 $x^2 + x + k - 2 = 0$의 판별식을 D라 할 때,
$D = 1 - 4k + 8 = 0$
$\therefore k = \frac{9}{4}$
따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = x + \frac{9}{4}$
$\therefore -4x + 4y = 9$

34. 이차함수$y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표가 각각 $0, -3$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와
직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표 $0, -3$ 은
이차방정식 $ax^2 - (b+5)x - a - 2 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

(두근의합) $= 0 + (-3) = \dfrac{b+5}{a}$

$\therefore\ 3a + b = -5 \cdots$ ㉠

(두 근의 곱) $= 0 \cdot (-3) = \dfrac{-a-2}{a}$

$\therefore a = -2$

㉠에서 $b = 1$ 이므로 $a + b = -1$

35. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 4a - 4$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

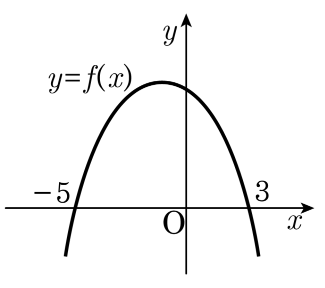
▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

$y = -x^2 - 2ax + 4a - 4 = -(x+a)^2 + a^2 + 4a - 4$
이므로 $x = -a$ 일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 4$ 를 가진다.
$\therefore M = a^2 + 4a - 4 = (a+2)^2 - 8$
따라서 M 은 $a = -2$ 일 때 최댓값 -8 을 가진다.

36. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?



① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)$ $(a<0)$ 으로 놓으면

$$f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right) = \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$$이므로

$\frac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서

$x = -6$ 또는 $x = 10$

따라서 방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은 4

37. 이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 좌표가 -3 일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 길이는? (단, k 는 상수)

① 5　② $5\sqrt{2}$　③ 7　④ $7\sqrt{2}$　⑤ $7\sqrt{5}$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와
직선 $y = x + k$ 가 두 점 P, Q 에서 만나므로
P, Q 의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 + 2x - 1 = x + k$
즉 $x^2 + x - 1 - k = 0 \cdots$ ㉠ 의 두 실근과 같다.
점 P 의 x좌표가 -3이므로
㉠에 $x = -3$을 대입하면 $9 - 3 - 1 - k = 0$
$\therefore\ k = 5$
$k = 5$ 를 ㉠에 대입하면 $x^2 + x - 6 = 0$
$(x + 3)(x - 2) = 0$
$\therefore\ x = -3$ 또는 $x = 2$
따라서 점 Q 의 x 좌표는 2 이다.
두 점 P, Q가 직선 $y = x + 5$ 위의 점이므로
$P(-3,\ 2),\ Q(2, 7)$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\{2-(-3)\}^2 + (7-2)^2} = \sqrt{50}$$
$$= 5\sqrt{2}$$

38. x에 관한 방정식 $|x^2-1|-x-k=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k의 값의 범위를 구하면?

① $1<k<\frac{5}{4}$　　② $1 \le k \le \frac{5}{4}$　　③ $-5<k<-\frac{5}{4}$

④ $k<1,\ k>\frac{5}{4}$　　⑤ $\frac{4}{5}<k<1$

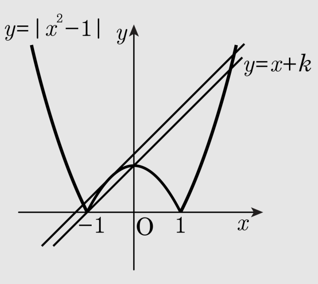
해설

$|x^2-1|-x-k=0$을 변형하여 분리하면

$|x^2-1|=x+k$, $y=|x^2-1|$, $y=x+k$

이 두 함수가 4개의 교점을 가지려면

다음그림과 같아야 한다.



$y=-x^2+1$, $y=x+k$가

두 점에서 만나야하므로

$x^2+x+k-1=0$의 판별식 $D>0$이어야 한다.

$D=1-4k+4>0$　　$\therefore\ k<\frac{5}{4}$

또, 직선 $y=x+k$는 점 $(-1,0)$을 지나는 직선 위에 존재해야 하므로

$0<-1+k$　　$\therefore\ k>1$

$\therefore\ 1<k<\frac{5}{4}$

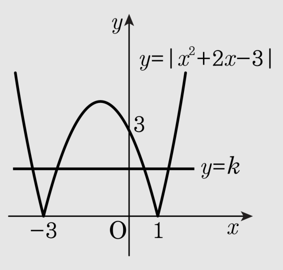
39. x에 대한 방정식 $|x^2+2x-3|=k$가 양의 근 2개와 음의 근 2개를 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위는?

① $k \geq 3$　② $k > 4$　③ $3 \leq k < 4$

④ $0 < k < 3$　⑤ $0 < k < 4$

해설

방정식 $|x^2+2x-3|=k$의 근은 두 함수 $y=|x^2+2x-3|$, $y=k$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.
따라서 그림에서 교점의 x좌표가 양수 2개,
음수 2개가 되려면 $0 < k < 3$



40. x에 대한 방정식 $|x^2-4x-5|=k$가 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

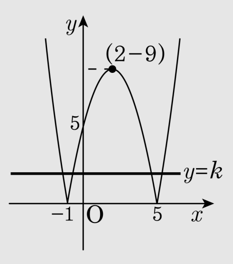
① $0<k<3$　② $0<k<5$　③ $3<k<5$

④ $1<k<4$　⑤ $-2<k<5$

해설

방정식 $|x^2-4x-5|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4x-5|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-4x-5|=|(x+1)(x-5)|=|(x-2)^2-9|$



따라서 주어진 방정식이 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<5$

41. 길이가 20m인 철망을 이용하여 벽을 한 면으로 하는 직사각형 모양의 가축 우리를 만들려고 한다. 가축 우리의 넓이가 최대가 되도록 만들 때, 그 넓이를 구하여라.

▶ 답 : ______ m^2

▷ 정답 : $50\,\mathrm{m}^2$

해설

가축 우리의 세로의 길이를 $x\,\mathrm{m}$라고 하면
가로의 길이는 $(20-2x)\,\mathrm{m}$이다.
가축 우리의 넓이를 $y\,\mathrm{m}^2$라고 하면
$y = x(20-2x) = -2x^2 + 20x$
$\quad = -2(x-5)^2 + 50$
한편, $x > 0$이고 $20-2x > 0$이므로
$0 < x < 10$
따라서 $x = 5$일 때
가축 우리의 최대 넓이는 $50\,\mathrm{m}^2$이다.

42. 함수 $f(x) = \frac{x^2}{4} + a(x \geq 0)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$ 가 서로 다른 두 양의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $0 \leq a < 1$ ② $a \geq 0$ ③ $a < 1$

④ $0 < a < 1$ ⑤ $a < 2$

해설

$f(x) = \frac{x^2}{4} + a(x \geq 0)$ 와 그 역함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점은 직선 $y = x$ 위에 있다.

따라서, 방정식 $\frac{x^2}{4} + a = x$,

즉 $x^2 - 4x + 4a = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

$x^2 - 4x + 4a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$\alpha + \beta = 4 > 0$ ······㉠

$\alpha\beta = 4a > 0,\ a > 0$ ······㉡

$\frac{D}{4} = 4 - 4a > 0,\ a < 1$ ······㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $0 < a < 1$