1. $\frac{1}{2^n}$ 이 소수점 아래 20 번째 자리에서 처음으로 0 이 아닌 수가 나타나는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.30$ 으로 계산한다.)

▶ 답:

▷ 정답: 195

해설

$\frac{1}{2^n}$ 이 소수점 아래 20 번째 자리에서 처음으로 0 이 아닌 수가 나타나므로

$\log \frac{1}{2^n}$ 의 지표는 -20 이다.

$-20 \le \log \frac{1}{2^n} < -19$

$-20 \le -n \log 2 < -19$

$\frac{19}{0.30} < n \le \frac{20}{0.30}$

$63.3 \times\times\times < n \le 66.6 \times\times\times$

$n = 64,\ 65,\ 66$

따라서 구하는 합은 $64 + 65 + 66 = 195$

2. $1 < x < 10$인 실수 x에 대하여 $\log x^3$과 $\log \frac{1}{x^2}$의 소수 부분이 같은 모든 x의 값의 곱을 구하면?

① 10 ② $10^{\frac{8}{5}}$ ③ 10^2 ④ $10^{\frac{5}{2}}$ ⑤ 10^3

해설

$1 < x < 10$에서 $0 < \log x < 1$이므로 $\log x = \alpha$로 놓으면

$\log x^3 = 3\log x = 3\alpha$,

$\log \frac{1}{x^2} = \log x^{-2} = -2\log x = -2\alpha$

이때, $\log x^3 - \log \frac{1}{x^2} = 5\alpha$이므로$5\alpha$는 정수이다.

한편, $0 < \alpha < 1$이므로 $0 < 5\alpha < 5$

$\therefore 5\alpha = 1, 2, 3, 4$

즉, $\alpha = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$이므로

$\log x = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$

$\therefore x = 10^{\frac{1}{5}}, 10^{\frac{2}{5}}, 10^{\frac{3}{5}}, 10^{\frac{4}{5}}$

따라서 모든 x의 값들의 곱은

$10^{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}} = 10^2$

3. $\log x$의 정수 부분이 4이고 $\log x$의 소수 부분과 $\log \sqrt[3]{x}$의 소수 부분이 같을 때 x의 값은? (단, $\log x$의 소수 부분은 0이 아니다.)

① $10^{4.1}$ ② $10^{4.2}$ ③ $10^{4.3}$ ④ $10^{4.4}$ ⑤ $10^{4.5}$

해설

$\log x$의 정수 부분이 4이고
$\log x$의 소수 부분이 0이 아니므로
$4 < \log x < 5 \cdots$㉠
$\log x$와 $\log \sqrt[3]{x}$의 소수 부분이 같으므로
$\log x - \log \sqrt[3]{x}$는 정수이어야 한다.

$$\log x - \log \sqrt[3]{x} = \log x - \frac{1}{3}\log x = \frac{2}{3}\log x \text{(정수)}$$

㉠에 의하여

$$\frac{8}{3} < \frac{2}{3}\log x < \frac{10}{3} \text{ 이므로}$$

$$\frac{2}{3}\log x = 3, \quad \log x = \frac{9}{2}$$

$$\therefore x = 10^{\frac{9}{2}} = 10^{4.5}$$

4. 다음 <보기>의 상용로그 중 그 소수 부분이 $\log 55$의 소수 부분과 같은 것의 개수를 구하면? (단, $\log 550 = 2.7404$)

보기

㉠ $\log 5.05$
㉡ $\log 0.00055$
㉢ $\log \frac{1}{550}$
㉣ $\log(5.5 \times 10^{10})$
㉤ $\log 5.5^{10}$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\log 550$의 진수 550과 소숫점의 위치만 다르고 숫자의 배열이 같은 수의 상용로그의 소수 부분은 $\log 550$의 소수 부분과 같다. 따라서 <보기> 중 $\log 550$과 소수 부분이 같은 것은 ㉡, ㉣의 2개이다.

5. 7^{100} 은 85 자리의 수이다. 이 때, 7^{10} 의 자릿수는?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

7^{100} 은 85 자리의 수이므로 $\log 7^{100}$ 의 지표는 84 이다.

$84 \le \log 7^{100} \le 85, 84 \le 100 \log 7 \le 85$

$0.84 \le \log 7 \le 0.85$

$0.84 \times 10 \le 10 \log 7 \le 0.85 \times 10$

$8.4 \le \log 7^{10} \le 8.5$

따라서 $\log 7^{10}$ 의 지표가 8 이므로 7^{10} 은 9 자리의 수이다.

6. $\log a = 0.08$일 때, $\left(\frac{1}{a}\right)^{20}$은 소수점 아래 몇 째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는가?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\log\left(\frac{1}{a}\right)^{20} = \log a^{-20} = -20\log a = -20 \times 0.08$

$= -1.6 = -2 + 0.4 = \bar{2}.4$

따라서 지표가 -2이므로 소수점 아래 2째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나온다.

7. $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$일 때, 12^{30}은 몇 자리 수인가?

① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 12^{30} &= 30\log(2^2 \times 3) \\ &= 30(2\log_{10} 2 + \log_{10} 3) \\ &= 30(2 \times 0.3010 + 0.4771) \\ &= 32.3730 = 32 + 0.3730\end{aligned}$$

$\log_{10} 12^{30}$의 지표가 32이므로
12^{30}은 33자리 정수이다.