

1. $\frac{1}{2^n}$ 이 소수점 아래 20 번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타나는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.30$ 으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 195

해설

$\frac{1}{2^n}$ 이 소수점 아래 20 번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타나므로

$\log \frac{1}{2^n}$ 의 지표는 -20 이다.

$$-20 \leq \log \frac{1}{2^n} < -19$$

$$-20 \leq -n \log 2 < -19$$

$$\frac{19}{0.30} < n \leq \frac{20}{0.30}$$

$$63.3 \times \times \times < n \leq 66.6 \times \times \times$$

$$n = 64, 65, 66$$

따라서 구하는 합은 $64 + 65 + 66 = 195$

2. $1 < x < 10$ 인 실수 x 에 대하여 $\log x^3$ 과 $\log \frac{1}{x^2}$ 의 소수 부분이 같은 모든 x 의 값의 곱을 구하면?

① 10

② $10^{\frac{8}{5}}$

③ 10^2

④ $10^{\frac{5}{2}}$

⑤ 10^3

해설

$1 < x < 10$ 에서 $0 < \log x < 1$ 이므로 $\log x = \alpha$ 로 놓으면
 $\log x^3 = 3 \log x = 3\alpha$,

$$\log \frac{1}{x^2} = \log x^{-2} = -2 \log x = -2\alpha$$

이때, $\log x^3 - \log \frac{1}{x^2} = 5\alpha$ 이므로 5α 는 정수이다.

한편, $0 < \alpha < 1$ 이므로 $0 < 5\alpha < 5$

$$\therefore 5\alpha = 1, 2, 3, 4$$

즉, $\alpha = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ 이므로

$$\log x = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$$

$$\therefore x = 10^{\frac{1}{5}}, 10^{\frac{2}{5}}, 10^{\frac{3}{5}}, 10^{\frac{4}{5}}$$

따라서 모든 x 의 값들의 곱은

$$10^{\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}} = 10^2$$

3. $\log x$ 의 정수 부분이 4이고 $\log x$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt[3]{x}$ 의 소수 부분이 같을 때 x 의 값은? (단, $\log x$ 의 소수 부분은 0이 아니다.)

① $10^{4.1}$

② $10^{4.2}$

③ $10^{4.3}$

④ $10^{4.4}$

⑤ $10^{4.5}$

해설

$\log x$ 의 정수 부분이 4이고

$\log x$ 의 소수 부분이 0이 아니므로

$$4 < \log x < 5 \cdots \textcircled{7}$$

$\log x$ 와 $\log \sqrt[3]{x}$ 의 소수 부분이 같으므로

$\log x - \log \sqrt[3]{x}$ 는 정수이어야 한다.

$$\log x - \log \sqrt[3]{x} = \log x - \frac{1}{3} \log x = \frac{2}{3} \log x (\text{정수})$$

⑦에 의하여

$$\frac{8}{3} < \frac{2}{3} \log x < \frac{10}{3} \text{ 이므로}$$

$$\frac{2}{3} \log x = 3, \log x = \frac{9}{2}$$

$$\therefore x = 10^{\frac{9}{2}} = 10^{4.5}$$

4. 다음 <보기>의 상용로그 중 그 소수 부분이 $\log 55$ 의 소수 부분과 같은 것의 개수를 구하면? (단, $\log 550 = 2.7404$)

보기

㉠ $\log 5.05$

㉡ $\log 0.00055$

㉢ $\log \frac{1}{550}$

㉣ $\log(5.5 \times 10^{10})$

㉤ $\log 5.5^{10}$

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$\log 550$ 의 진수 550과 소숫점의 위치만 다르고 숫자의 배열이 같은 수의 상용로그의 소수 부분은 $\log 550$ 의 소수 부분과 같다. 따라서 <보기> 중 $\log 550$ 과 소수 부분이 같은 것은 ㉡, ㉣의 2개이다.

5. 7^{100} 은 85자리의 수이다. 이 때, 7^{10} 의 자릿수는?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

7^{100} 은 85자리의 수이므로 $\log 7^{100}$ 의 지표는 84이다.

$$84 \leq \log 7^{100} \leq 85, 84 \leq 100 \log 7 \leq 85$$

$$0.84 \leq \log 7 \leq 0.85$$

$$0.84 \times 10 \leq 10 \log 7 \leq 0.85 \times 10$$

$$8.4 \leq \log 7^{10} \leq 8.5$$

따라서 $\log 7^{10}$ 의 지표가 8이므로 7^{10} 은 9자리의 수이다.

6. $\log a = 0.08$ 일 때, $\left(\frac{1}{a}\right)^{20}$ 은 소수점 아래 몇 째 자리에서 처음으로 0 이 아닌 숫자가 나타나는가?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\log \left(\frac{1}{a}\right)^{20} = \log a^{-20} = -20 \log a = -20 \times 0.08$$

$$= -1.6 = -2 + 0.4 = \bar{2}.4$$

따라서 지표가 -2 이므로 소수점 아래 2째 자리에서 처음으로 0 이 아닌 숫자가 나온다.

7. $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ 일 때, 12^{30} 은 몇 자리 수인가?

① 31

② 32

③ 33

④ 34

⑤ 35

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 12^{30} &= 30 \log(2^2 \times 3) \\ &= 30(2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3) \\ &= 30(2 \times 0.3010 + 0.4771) \\ &= 32.3730 = 32 + 0.3730\end{aligned}$$

$\log_{10} 12^{30}$ 의 지표가 32이므로
 12^{30} 은 33자리 정수이다.