1. 다음 보기 중에서 y 가 x 에 관한 이차함수인 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = 2x(x-1)$	㉡ $y = \frac{x}{3} - 4$
㉢ $y = -3x^2 + 7$	㉣ $y = 2x^3 + x^2 - 5$
㉤ $y = \frac{5}{x^2}$	㉥ $y = \frac{x^2 + 2}{3}$

① ㉠, ㉢ ② ㉠,㉢,㉥ ③ ㉡,㉣,㉤

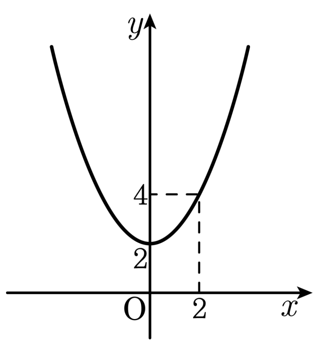
④ ㉢,㉣,㉥ ⑤ ㉠,㉢,㉤,㉥

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에서 $a \neq 0$ 이면 이차함수

이차함수인 것은 ② ㉠,㉢,㉥이다.

2. 다음 그래프의 이차함수가 점 $(a,\ 10)$ 을 지날 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)



▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 4$

해설

$y = ax^2 + 2$ 가 점 $(2,\ 4)$ 를 지나므로

$4 = a \times 2^2 + 2 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ 의 그래프가 점 $(a,\ 10)$ 을 지나므로

$10 = \frac{1}{2}a^2 + 2 \quad \therefore a = 4(\because a > 0)$

3. 다음 중 $y=-2x^2$ 의 그래프를 평행이동하여 포갤 수 있는 그래프의 식은?

① $y=2(x-1)^2$
② $y=-2x^2+1$
③ $y=-\frac{1}{2}x^2-3$
④ $y=-2(2x+1)^2$
⑤ $y=2x^2-5$

해설

이차항의 계수가 같은 이차함수를 찾는다.

4. 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2+3$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동 시킨 함수의 식은?

① $y=-\frac{1}{2}x^2+1$ ② $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ ③ $y=-\frac{1}{2}x^2-1$
④ $y=-\frac{1}{2}x^2-2$ ⑤ $y=-\frac{1}{2}x^2$

해설

$y=-\frac{1}{2}x^2+3-5=-\frac{1}{2}x^2-2$

5. 이차함수 $y = -7(x+2)^2 + 3$ 의 축과 꼭짓점의 좌표를 구하면?

① 꼭짓점 $(-2, -3)$, 축 $x = -2$
② 꼭짓점 $(-2, -3)$, 축 $x = -3$
③ 꼭짓점 $(-2, 3)$, 축 $x = -2$
④ 꼭짓점 $(-2, 3)$, 축 $x = 3$
⑤ 꼭짓점 $(2, 3)$, 축 $x = 2$

해설
꼭짓점 $(-2, 3)$, 축 $x = -2$

6. 이차함수 $y = 3(x-2)^2 - 4$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

① 제1 사분면　② 제2 사분면　③ 제3 사분면
④ 제4 사분면　⑤ 없다.

해설
꼭짓점이 $(2, -4)$ 이고 y 절편이 8 이므로
제 1, 2, 4 사분면을 지난다.

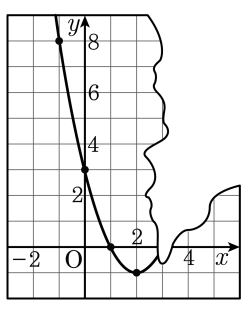
7. 이차함수 $y=(x-1)^2-2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭인 포물선의 식은?

① $y=(x-1)^2+2$
② $y=(x+1)^2+2$
③ $y=(x-1)^2-2$
④ $y=-(x+1)^2+2$
⑤ $y=-(x-1)^2+2$

해설

y 대신에 $-y$ 를 대입하면 $y=-(x-1)^2+2$ 이다.

8. 다음 그림은 어떤 이차함수의 그래프의 일부분이 찢겨져 나간 것이다. 이 이차함수의 그래프가 점 $(5,\ a)$ 를 지날 때, a 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

주어진 이차함수의 그래프는 $x = 2$ 를 대칭축으로 갖는다. 따라서 $x = 5$ 와 $x = -1$ 일 때의 y 의 값이 같으므로 $a = 8$ 이다.

9. 함수 $y = f(x)$ 에서 $y = x^2 + 3x - 4$ 일 때, $f(f(f(1)))$ 의 값을 구하여라.

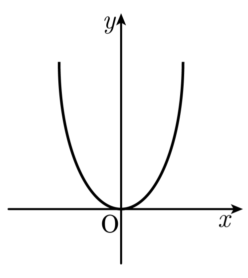
▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(1) = 1^2 + 3 - 4 = 0$
$f(f(1)) = f(0) = -4$
$\therefore f(f(f(1))) = f(f(0)) = f(-4) = 0$

10. 다음 중 이차함수 중 그래프가 다음 그림과 같이 나타나는 것을 모두 골라라.



㉠ $y = 3x^2$	㉡ $y = -4x^2$	㉢ $y = \frac{1}{3}x^2$
㉣ $y = \frac{1}{4}x^2$	㉤ $y = -\frac{1}{4}x^2$	㉥ $y = -1.5x^2$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉣

해설

그래프가 아래로 볼록하므로 $y = ax^2$ 의 그래프에서 $a > 0$ 이다.
따라서 ㉠,㉢,㉣이다.

11. 이차함수 $y = -x^2 + 2x - 3$ 의 그래프에서 x의 값이 증가할 때, y 의 값이 감소하는 x 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x > 1$

해설

$y = -x^2 + 2x - 3$

$y = -(x - 1)^2 - 2$

따라서 꼭짓점이 $(1, -2)$ 인 위로 볼록한 그래프이므로 x의 값이 증가할 때, y의 값이 감소하는 x의 범위는 $x > 1$

12. 이차함수 $y=3x^2-6x+7$을 $y=a(x-p)^2+q$ 의 꼴로 바꾸었을 때, $a+p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned} y &= 3x^2-6x+7 \\ &= 3\left(x^2-2x+1-1\right)+7 \\ &= 3\left(x^2-2x+1\right)+4 \\ &= 3(x-1)^2+4 \end{aligned}$$

$\therefore\ a=3,\ p=1,\ q=4$

$\therefore\ a+p+q=3+1+4=8$

13. 포물선 $y = -2x^2 + 2mx - 6$ 의 축이 $x = 1$ 일 때, m 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

축의방정식 $x = 2$ 이므로

$$y = -2x^2 + 2mx - 6$$
$$= -2\left(x^2 - mx + \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{4}\right) - 6$$
$$= -2\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{m^2}{2} - 6$$

$$\frac{m}{2} = 1$$

$$\therefore m = 2$$

14. 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2+ax+3$ 의 그래프가 $(1,4)$를 지난다고 한다. 이때, x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소하는 범위를 구하면?

① $x>1$ ② $x>2$ ③ $x<-1$

④ $x>-2$ ⑤ $x<-3$

해설

$(1,4)$ 를 대입하면 $a=\frac{2}{3}$ 이다.

$a=\frac{2}{3}$ 를 대입하면

$y=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+3$

$=\frac{1}{3}(x^2+2x)+3$

$=\frac{1}{3}(x+1)^2+3-\frac{1}{3}$ 이므로

축의 방정식은 $x=-1$ 이다.

따라서 $x<-1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 값은 감소한다.

15. 이차함수의 그래프가 x 축과 두 점에서 만나는 것을 모두 고르면?

① $y = 4x^2 - 4x + 1$　　② $y = x^2 - 3x + 2$

③ $y = 2x^2 + 3x + 4$　　④ $y = -2x^2 + 4x - 3$

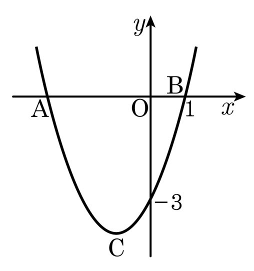
⑤ $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 1$

해설

② $D = 3^2 - 4 \times 2 > 0$

⑤ $D = (-1)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

16. $y = x^2 + ax - 3$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 x 축과 두 점 A, B 에서 만나고 꼭짓점이 C 일 때, 삼각형 ABC 의 넓이를 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$y = x^2 + ax - 3$ 에 B(1, 0) 을 대입하면 $a = 2$

$y = x^2 + 2x - 3$
$y = (x+3)(x-1) \Rightarrow \mathrm{A}(-3,\ 0)$
$y = (x+1)^2 - 4 \Rightarrow \mathrm{C}(-1,\ -4)$

따라서 삼각형 ABC 의 넓이는 $(3+1) \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$ 이다.

17. 다음 중 이차함수 $y = x^2 - 4x + 2$ 에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 모든 x 의 값에 대하여 y 의 값의 범위는 $y \leq -2$ 이다.

② 그래프는 위로 볼록한 포물선이다.

③ y 축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 4)$ 이다.

④ 축의 방정식은 $x = 2$ 이다.

⑤ $x > 2$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

해설

$y = (x-2)^2 - 2$

① 모든 x 의 값에 대하여 y 의 값의 범위는 $y \geq -2$ 이다.

② 아래로 볼록하다.

③ y 축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 2)$ 이다.

⑤ y 도 증가한다.

18. 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프가 두 점 $(4,\ 8)$, $\left(b,\ \frac{9}{2}\right)$ 를 지난다. 이 함수와 x 축 대칭인 이차함수가 $(b,\ c)$ 를 지날 때, c 의 값은?(단, $b<0$)

① -2 ② $-\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $-\frac{9}{2}$

해설

$y=ax^2$ 에 $(4,\ 8)$, $\left(b,\ \frac{9}{2}\right)$ 을 대입하면

$a=\frac{1}{2}$, $b=-3$ 이다.

이 이차함수와 x 축 대칭인 이차함수는

$y=-\frac{1}{2}x^2$ 이고 $(-3, c)$ 를 지나므로

$\therefore\ c=-\frac{9}{2}$

19. 다음의 이차함수의 그래프에 대한 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

(가) $y = \frac{1}{2}x^2$
(나) $y = -2x^2$
(다) $y = 2x^2$
(라) $y = -\frac{1}{4}x^2$

① (나)와 (다)의 그래프는 폭이 같다.

② 아래로 볼록한 포물선은 (가)와 (다)이다.

③ 폭이 가장 넓은 그래프는 (라)이다.

④ (나)와 (다)의 그래프는 x 축에 대하여 서로 대칭이다.

⑤ x 축 아래쪽에 나타나지 않는 그래프는 (나), (라)이다.

해설

① $|a|$ 이 같으므로 두 그래프는 폭이 같다.
② $a > 0$이므로 아래로 볼록이다.
③ $|a|$가 작을 수록 폭이 넓다.
④ a 의 부호가 반대이면 x축 대칭이다.
⑤ (나), (라)는 $a < 0$ 이므로 x 축 아래에 나타난다.

20. 이차함수 $y=\frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 0)$ 이 되도록 평행이동하면 점 $(k,\ 4)$를 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -5

해설

이차함수 $y=\frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 0)$ 이 되도록 평행이동하면 $y=\frac{1}{4}(x+1)^2$ 이다. 점 $(k,\ 4)$를 지나므로 대입하면 $4=\frac{1}{4}(k+1)^2$, $16=(k+1)^2$, $k+1=\pm4$ 따라서 $k=3,\ -5$ 이다.

21. 이차함수 $y = x^2 - 4x + 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하였더니 점 $(3,\ -4)$, $(0,\ 11)$ 을 지났다. $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $p + q = -1$

해설

평행이동한 그래프의 식을
$y = x^2 + bx + c$ 라고 하자.
$y = x^2 + bx + c$ 의 그래프가 점 $(3,\ -4)$, $(0,\ 11)$ 을 지나므로
$-4 = 9 + 3b + c,\ 11 = c$
$3b = -24 \qquad \therefore\ b = -8$
$y = x^2 - 8x + 11 = (x - 4)^2 - 5$
$y = x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 - 2$
꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -2)$ 에서 $(4,\ -5)$ 로 이동하였으므로 $p = 2,\ q = -3$ 이다.
$\therefore\ p + q = 2 - 3 = -1$

22. 다음 보기의 이차함수 그래프 중 $y = ax^2$ 의 그래프가 3 번째로 폭이 넓을 때, $|a|$ 의 범위는?

보기

㉠ $y = -\frac{3}{2}x^2$　　㉡ $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$

㉢ $y = 2x^2 - x$　　㉣ $-3(x+2)^2$

㉤ $y = \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1}$

① $1 < |a| < \frac{1}{2}$　② $1 < |a| < \frac{3}{2}$　③ $1 < |a| < \frac{5}{2}$

④ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{3}{2}$　⑤ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{5}{2}$

해설

a 의 절댓값이 작을수록 폭이 넓어진다.
a 의 절댓값을 각각 구하면
㉠ $\frac{3}{2}$ ㉡$\frac{1}{2}$ ㉢2 ㉣3 ㉤1 이므로 폭이 넓은 순서는 ㉡, ㉤, ㉠, ㉢, ㉣ 이다. 따라서 두 번째인 1과 세 번째인 $\frac{3}{2}$ 사이에 있어야 하므로
④ $1 < |a| < \frac{3}{2}$ 이다.

23. $y = 2(x-3)^2 - 5$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 , y축의 방향으로 5 만큼 평행이동 한 이차함수의 그래프 위에 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 8)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$ 의 y 축에 대하여 대칭인 점을 각각 C , D 라 하고, 원점을 O 라 한다. $\triangle\mathrm{ABC}$ 와 $\triangle\mathrm{BOD}$ 의 넓이의 비가 $2\ :\ a^2$ 일 때, a 의 값을 구하면? (단, $0 < a < 2$)

① $a = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$ ② $a = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

③ $a = \dfrac{-1+\sqrt{10}}{2}$ ④ $a = \dfrac{-1-\sqrt{10}}{2}$

⑤ $a = \dfrac{2}{3}$

해설

$y = 2(x-3)^2 - 5$ 의 그래프를 평행이동하면 $y = 2x^2$ 이다. 점 $\mathrm{A}(2,8)$ 의 y 축에 대하여 대칭인 점 C 의 좌표는 $(-2,8)$ 이고, 점 $\mathrm{B}(a,b)$ 의 y 축에 대하여 대칭인 점 D 의 좌표는 $(-a,b)$ 이다. 이 때, $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 $\overline{\mathrm{AC}}$ 를 밑변, 점 A, B 의 y 좌표의 차를 높이로 하면 $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \times 4 \times (8-b)$

이 식에 $b = 2a^2$ 을 대입하면 ($\because (a,\ b)$ 는 $y = 2x^2$ 위의 점)

$\dfrac{1}{2} \times 4 \times (8-2a^2) = 4(4-a^2)$

또한, $\triangle\mathrm{BOD} = \dfrac{1}{2} \times 2a \times 2a^2 = 2a^3$

$\triangle\mathrm{ABC}$ 와 $\triangle\mathrm{BOD}$ 의 넓이의 비가 $2 : a^2$ 이므로 $4(4-a^2) : 2a^3 = 2 : a^2$

$\therefore a^2(4-a^2) = a^3, a^2 + a - 4 = 0$ 에서 $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

여기서 $0 < a < 2$ 이므로 $a = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

24. 이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2 - k$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점 중 0 보다 큰 좌표의 점과 원점 사이의 거리가 정수가 되게 하는 모든 k 의 값들의 합을 구하여라. (단, k 는 20 이하의 자연수이다.)

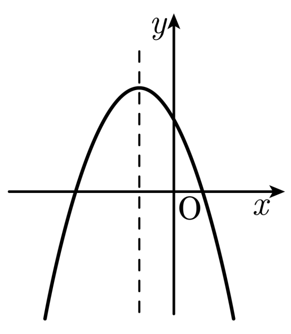
▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$y = \frac{1}{4}x^2 - k$와 x 축과의 교점의 x 좌표를 구하면 $\frac{1}{4}x^2 - k = 0$
에서 $x = 2\sqrt{k}$ ($\because$ $x > 0$)
따라서 교점과 원점 사이의 거리는 $2\sqrt{k}$이다.
$2\sqrt{k}$가 정수가 되도록 하는 20 이하의 자연수 k값을 구하면
$k = 1,\ 4,\ 9,\ 16$
따라서 모든 k 값들의 합은 $1 + 4 + 9 + 16 = 30$이다.

25. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y=cx^2+ax+b$ 의 그래프의 꼭짓점은 제 몇 사분면에 있는가?



① 제1 사분면 ② 제2 사분면 ③ 제3 사분면
④ 제4 사분면 ⑤ 답이 없다.

해설

$a<0,\ c>0,\ -\dfrac{b}{2a}<0$ 에서 $b<0$ $\therefore$ $a<0,\ b<0,\ c>0$

$y=cx^2+ax+b$ 에서

(1)$c>0$ 이므로 아래로 볼록

(2) 꼭짓점의 x 좌표를 구하면

$$y=c\left(x^2+\frac{a}{c}x+\frac{a^2}{4c^2}-\frac{a^2}{4c^2}\right)+b$$
$$=c\left(x+\frac{a}{2c}\right)^2-\frac{a^2}{4c}+b \text{이므로}$$

축 : $-\dfrac{a}{2c}>0$

(3)y 절편 : $b<0$

따라서, 그래프는 다음 그림과 같으므로 꼭짓점은 제4사분면에 있다.