1. 이차함수 $y = 2x^2 + kx - k$ 의 그래프가 x축과 만나도록 하는 상수 k의 값이 아닌 것은?

① -8 ② -1 ③ 0 ④ 5 ⑤ 8

해설

이차방정식 $2x^2 + kx - k = 0$에서 $D = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) \geq 0$이어야 하므로

$k^2 + 8k \geq 0,\ k(k+8) \geq 0$

$\therefore k \leq -8$ 또는 $k \geq 0$

따라서 위의 k의 값의 범위에 속하지 않는 것은 ②이다.

2. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k < 1$ ② $1 < k < 3$

③ $k < 3$ ④ $3 < k < 5$

⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

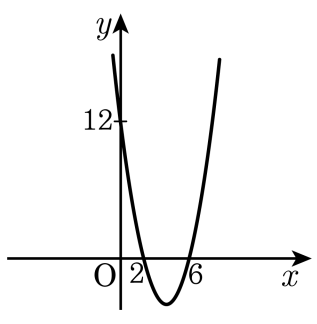
이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$

$k^2 - 6k + 5 > 0, \ (k-1)(k-5) > 0$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

3. 다음은 이차함수 $y = (x-2)(x-6)$ 의 그래프이다.



이 이차함수가 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

이차방정식 $(x-2)(x-6) = 0$ 에서 $x = 2$ 또는 $x = 6$
따라서 A $(2,\ 0)$, B $(6,\ 0)$ 이므로 $\overline{AB} = 4$

4. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2,\ k < -1$ ② $k > 3,\ k < -1$ ③ $k > 1,\ k < -1$

④ $k > 3,\ k < -2$ ⑤ $k > 3,\ k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로
$-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1-k)x + 1 = 0$ 에서
$\mathrm{D} = (1-\mathrm{k})^2 - 4 > 0$
$k^2 - 2k - 3 = (k-3)(k+1) > 0$
$\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

5. 함수 $y = -x^2 + kx$의 그래프가 직선 $y = -x + 4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y = -x^2 + kx$가 $y = -x + 4$에 접하려면
$4 - x = -x^2 + kx \Rightarrow x^2 - (k+1)x + 4 = 0$의 판별식은 $D = 0$
이어야 한다.
$D = (k+1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow k + 1 = \pm 4$
$\therefore k = 3 \ (\because k > 0)$

6. 이차함수 $y = x^2 - 6x + 12$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + k$ 가 만나기 위한 k 의 최솟값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

두 그래프가 만나려면 연립 방정식의 판별식이
0 보다 크거나 같아야 한다.

$\Rightarrow 2x + k = x^2 - 6x + 12$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 - k = 0$

$\frac{D}{4} = 4^2 - 12 + k \geq 0$

$\Rightarrow k \geq -4$

$\therefore$ 최솟값 : -4

7. 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최솟값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ 에서
$x = 1$ 일 때 최소이며 최솟값은 $f(1) = 1$

8. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = x^2 - 2x - 3 \ (0 \le x \le 4)$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 5

▷ 정답 : 최솟값 −4

해설

먼저, 주어진 식을 $y = a(x-m)^2 + n$의 꼴로 변형하여그래프를 그린 다음 주어진 구간 안에서 가장 높은 점과 가장 낮은 점을 조사한다.

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$

꼭짓점 : $x = 1$ 일 때 $y = -4$

양끝점 : $\begin{cases} x = 0 \text{ 일 때 } y = -3 \\ x = 4 \text{ 일 때 } y = 5 \end{cases}$

$x = 4$에서 최댓값 5 , $x = 1$에서 최솟값 −4

9. 이차함수 $y = -x^2 - 2x + 7 (-3 \le x \le 1)$ 의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, $a + b$의 값을 구하면?

① 4 ② 7 ③ 8 ④ 11 ⑤ 12

해설

$y = -x^2 - 2x + 7 = -(x+1)^2 + 8$이므로
꼭짓점의 좌표는 $(-1, 8)$이고, 위로 볼록한 포물선이다.
주어진 구간의 양 끝값을 구하면,
$x = -3$일 때 $y = -(-3+1)^2 + 8 = 4$
$x = 1$일 때 $y = -(1+1)^2 + 8 = 4$이다.
따라서 최댓값 $a = 8$이고, 최솟값 $b = 4$이므로 $a + b = 12$

10. 이차함수 $y = 2x^2 - 6x + 5 (2 \le x \le 5)$ 의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, ab의 값을 구하면?

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

해설

$y = 2x^2 - 6x + 5 = 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 5$

$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ 이므로

꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이고

아래로 볼록한 포물선이다.
꼭짓점이 주어진 구간 안에 포함되지 않으므로 최댓값, 최솟값은 주어진 구간의 양끝값이 된다.

$x = 2$일 때 $y = 2\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 1$

$x = 5$일 때 $y = 2\left(5 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 25$

따라서 최댓값 $a = 25$이고, 최솟값 $b = 1$이므로 $ab = 25$

11. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$에서

$\dfrac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$이므로

$a^2 + b^2 = 5$

12. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 점 $(1, 5)$ 를 지나고, $x = -1$ 일 때 최솟값 -3 을 가진다. 이 때, abc 의 값은?

① -10　② -8　③ -6　④ -4　⑤ -2

해설

$y = a(x+1)^2 - 3$ 에 $(1, 5)$ 를 대입하면 $a = 2$
따라서 $y = 2(x+1)^2 - 3$ 을 전개하면
$y = 2x^2 + 4x - 1$ 이므로 $a = 2,\ b = 4,\ c = -1$
$\therefore\ abc = -8$

13. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 $x = 1$에서 최솟값 1을 가지고 $f(2) = 3$을 만족시킬 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a + b + c$의 값은?

① -4 ② -3 ③ 1 ④ 4 ⑤ 7

해설

$f(x) = a(x-1)^2 + 1$ 에서 $f(2) = 3$ 이므로
$a + 1 = 3 \quad \therefore a = 2$
즉, $f(x) = 2(x-1)^2 + 1 = 2x^2 - 4x + 3$ 이므로
$b = -4,\ c = 3$
$\therefore a + b + c = 2 - 4 + 3 = 1$

14. 함수 $y = -x^2 - 2x + 5$ $(-2 \le x \le 2)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 을 구하여라.

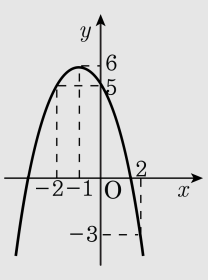
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = -x^2 - 2x + 5 = -\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) + 5 = -(x+1)^2 + 6$

점$(-1, 6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.
$f(-2) = 5, f(2) = -3$
따라서 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $f(-1) = 6$ 이며
최솟값은 $x = 2$ 일 때 $f(2) = -3$ 이다.
$\therefore\ M + m = 6 - 3 = 3$



15. $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면
$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x-1)^2 + 1$
따라서 함수 $f(x)$ 는 점 $(1, 1)$ 을 꼭지점으로 하는
아래로 볼록한 포물선이다.
그러므로 $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서
최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,
최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

16. 함수 $f(x) = ax^2 - 2ax + b$가 $-2 \le x \le 2$에서 최댓값 5 , 최솟값 -4를 가질 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 상수이고 $a < 0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = ax^2 - 2ax + b$
$= a(x-1)^2 - a + b$ 에서 $a < 0$ 이고
꼭짓점의 x좌표 1이 $-2 \le x \le 2$에 속하므로
$x = 1$일 때 최댓값을 갖고,
$x = -2$일 때 최솟값을 갖는다.
즉, $f(1) = -a + b = 5$, $f(-2) = 8a + b = -4$
두 식을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 4$
$\therefore a + b = 3$

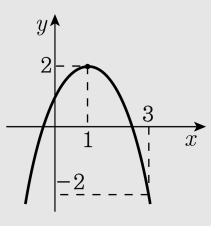
17. x의 범위가 $0 \le x \le 3$ 일 때, 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 1$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$y = -x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2$
이므로 오른쪽 그림에서 주어진 이차함수는 $x = 1$ 일 때, 최댓값 2, $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2를 가짐을 알 수 있다.
$\therefore\ M + m = 2 + (-2) = 0$



18. x의 범위가 $-3 \le x \le 2$ 일 때, 이차함수 $y = x^2 - 2x - 1$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$
$\Rightarrow m : x = 1$ 일 때 : -2,
$M : x = -3$ 일 때 : 14
$\therefore m + M = 12$

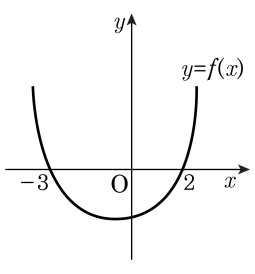
19. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x의 범위가 $-2 \le x \le 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 6 ⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow \quad y = (x-1)^2 - 3$
$-2 \le x \le 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,
$x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.
$\therefore$ 최댓값 : $(-2-1)^2 - 3 = 6$

20. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2-1)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

주어진 그래프에서 $f(-3)=0,\ f(2)=0$ 이므로
방정식 $f(x^2-1)=0$ 의 근은
(i) $x^2-1=-3$ 일 때, $x^2=-2 \quad \therefore\ x=\pm\sqrt{2}i$
(ii) $x^2-1=2$ 일 때, $x^2=3 \quad \therefore x=\pm\sqrt{3}$
(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2 개이다.

21. 이차함수 $y = ax^2 + bx$의 그래프가 점 $(-1, 4)$를 지나고 직선 $y = 2x - 2$와 접할 때, 상수 a, b의 합 $a + b$의 값은? (단, $ab < 0$)

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

이차함수 $y = ax^2 + bx$의 그래프가
점 $(-1, 4)$를 지나므로
$4 = a - b \cdots$ ㉠
또, 직선 $y = 2x - 2$와 접하므로
이차방정식 $ax^2 + (b-2)x + 2 = 0$에서
$D = (b-2)^2 - 8a = 0$
$\therefore\ b^2 - 4b + 4 - 8a = 0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$\begin{cases} a = 18 \\ b = 14 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$$

이때, $ab < 0$을 만족시키는
a, b의 값은 $a = 2,\ b = -2$
$\therefore\ a + b = 0$

22. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$

④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면

$x^2 + (m-3)x + 1 = 0, D = (m-3)^2 - 4 > 0$

$m^2 - 6m + 5 > 0, (m-1)(m-5) > 0$

$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

23. 이차함수 $y = x^2 + ax + 1$의 그래프와 직선 $y = 3x - 8$이 만나지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하면?

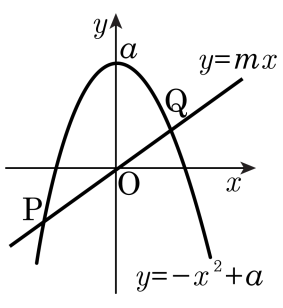
① $-5 < a < -1$ ② $-3 < a < 9$ ③ $-1 < a < 4$

④ $2 < a < 6$ ⑤ $4 < a < 7$

해설

이차방정식 $x^2 + ax + 1 = 3x - 8$,
즉 $x^2 + (a-3)x + 9 = 0$이 이차방정식이 허근을 가져야 하므로
$D = (a-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 < 0$
$a^2 - 6a - 27 < 0$
$(a+3)(a-9) < 0$
$\therefore -3 < a < 9$

24. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = -x^2 + a$의 그래프와 직선 $y = mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5} - 1$일 때, $a + m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = -x^2 + a$ 와 $y = mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2 + a = mx$ 의 근이다.
점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5} - 1$이므로
방정식 $x^2 + mx - a = 0$의 한 근이 $\sqrt{5} - 1$ 이다.
그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5} - 1$ 이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-m = \left(\sqrt{5} - 1\right) + \left(-\sqrt{5} - 1\right) = -2$

$-a = \left(\sqrt{5} - 1\right)\left(-\sqrt{5} - 1\right) = -4$
$\therefore a = 4,\ m = 2 \qquad \therefore a + m = 6$

25. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 2$ 에 대하여 $1 \le x \le 4$ 에서 $f(f(x))$ 의 최솟값은?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

$f(x) = x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2$
$1 \le x \le 4$ 에서 $-2 \le f(x) \le 2$ 이므로
$f(x) = t$ 로 놓으면

$$f(f(x)) = f(t) = t^2 - 4t + 2$$
$$= (t-2)^2 - 2(-2 \le t \le 2)$$

따라서, $t = 2$ 일 때 최솟값은 -2 이다.

26. 두 실수 x, y가 $x^2+y^2+4x+y-2=0$을 만족시킬 때, y의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^2+4x+(y^2+y-2)=0$에서 x가 실수이므로

$\frac{D}{4}=4-y^2-y+2\geq 0$

$(y+3)(y-2)\leq 0$

$\therefore -3\leq y\leq 2$

따라서 y의 최댓값은 2, 최솟값은 -3이다.

27. $x,\ y$ 가 실수일 때, $2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 = 2(x-1)^2 + (y+3)^2 + 5$
이 때, $x,\ y$ 가 실수이므로
$(x-1)^2 \geq 0$, $(y+3)^2 \geq 0$
$\therefore\ 2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 \geq 5$
따라서 구하는 최솟값은 5 이다.