1. 다항식 $5xy-yx^2+2x^3+2yz^2$에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

① x의 계수는 $5y$이다.
② x^2의 계수는 $-y$이다.
③ x에 대한 3차식이다.
④ x에 대한 상수항은 $2yz^2$이다.
⑤ $y,\ z$에 대한 2차식이다.

해설

$y,\ z$에 대한 3차식이다.

2. 두 다항식 $A = 3x - y + 1$, $B = -x + 2y - 2$에 대하여 $A - B$의 계산결과로 맞는 식은?

① $2x - 3y - 1$ ② $4x + y - 1$ ③ $2x + 3y + 3$
④ $4x - 3y + 3$ ⑤ $2x + y - 1$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= (3x - y + 1) - (-x + 2y - 2) \\ &= 3x - y + 1 + x - 2y + 2 \\ &= 4x - 3y + 3 \end{aligned}$$

3. $(3a+3b)-2b=3a+(3b-2b)=3a+b$에서 사용된 법칙을 순서대로 나열한 것은?

① 결합법칙, 결합법칙
② 교환법칙, 결합법칙
③ 교환법칙, 분배법칙
④ 결합법칙, 분배법칙
⑤ 분배법칙, 결합법칙

해설

$$\begin{aligned}(3a+3b)-2b &= 3a+(3b-2b) &&: \text{결합법칙}\\ &= 3a+(3-2)b &&: \text{분배법칙}\\ &= 3a+b\end{aligned}$$

4. 다음 식을 계산했을 때, 몫은?

$$(4x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1) \div (x^2 - x + 1)$$

① $4x^2 - 3x + 2$ ② $4x^2 - x - 2$ ③ $4x^2 - 2x + 1$
④ $-4x^2 - x - 2$ ⑤ $-4x^2 + x - 2$

해설

$\therefore$ 몫 : $4x^2 - x - 2$, 나머지 : $-5x + 3$

5. 다음 중 $(x-y)^2(x+y)^2$을 전개한 식은?

① x^4-y^4
② x^2-y^2
③ $x^4-2x^2y^2+y^4$
④ $x^4-x^2y^2+y^4$
⑤ $x^4-4x^2y^2+y^4$

해설

$$\begin{aligned}(x-y)^2(x+y)^2 &= \{(x-y)(x+y)\}^2 \\ &= (x^2-y^2)^2 \\ &= x^4-2x^2y^2+y^4\end{aligned}$$

6. $(a-b+c)(a-b-c)$를 전개하면?

① $-a^2+b^2-c^2+2ca$ ② $a^2-b^2+c^2+2ab$
③ $a^2+b^2+c^2+abc$ ④ $a^2-b^2-c^2+2bc$
⑤ $a^2+b^2-c^2-2ab$

해설

$(a-b+c)(a-b-c)$
$=\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}$
$=(a-b)^2-c^2$
$=a^2+b^2-c^2-2ab$

7. 다항식 $(5x^2+3x+1)^2$ 을 전개하였을 때, x^2 의 계수는?

① 10　② 13　③ 16　④ 19　⑤ 25

해설

$(5x^2+3x+1)(5x^2+3x+1)$ 에서

ⅰ) (일차항)×(일차항) 의 경우 $9x^2$

ⅱ) (이차항)×(상수항) 의 경우 $2\times 5x^2$

즉, $5x^2+5x^2+9x^2=19x^2$

$\therefore$ 19

8. $x+y+z=3$, $xy+yz+zx=-1$ 일 때 $x^2+y^2+z^2$ 의 값을 구하면?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (x+y+z)^2-2(xy+yz+xz) \\ &= 9+2=11 \end{aligned}$$

9. $ax^2-(2a+c)x-1=(b-2)x^2-c$가 x의 값에 관계없이 항상 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① -1　② 2　③ 4　④ 6　⑤ 8

해설

양변의 계수를 비교하면

$a=b-2$ ⋯ ㉠

$2a+c=0$ ⋯ ㉡

$1=c$ ⋯ ㉢

$\therefore\ a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2},\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=2$

10. x 의 값에 관계없이 등식 $x^2+13x-18=a(x+2)(x-3)+bx(x+2)+cx(x-3)$ 이 항상 성립할 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

해설

준식에

$x=0$을 대입하면 $-18=-6a$에서 $a=3$

$x=3$을 대입하면 $30=15b$에서 $b=2$

$x=-2$을 대입하면 $-40=10c$에서 $c=-4$

$\therefore\ a+b+c=3+2+(-4)=1$

11. 다항식 $x^{22}+x^{11}+22x+11$을 $x+1$로 나눈 나머지는?

① -33　② -22　③ -11　④ 11　⑤ 33

해설

$f(x)=x^{22}+x^{11}+22x+11$이라 하면,
$f(x)=(x+1)Q(x)+R$에서 $f(-1)=R$이므로
$f(-1)=(-1)^{22}+(-1)^{11}-22+11=-11$

12. x에 대한 다항식 x^3-2x^2-px+2가 $x-2$로 나누어떨어지도록 상수 p의 값을 정하면?

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 3

해설

$x^3-2x^2-px+2=f(x)$로 놓으면 $f(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지려면

$f(2)=0$ 이므로,

$f(2)=8-8-2p+2=0$

$\therefore p=1$

13. 다항식 $ax+ay-bx-by$를 인수분해 하면?

① $x(a-b)$　② $(a-b)(x-y)$　③ $(a+b)(x-y)$
④ $(a-b)(x+y)$　⑤ $(a+b)(x+y)$

해설

$$\begin{aligned} ax+ay-bx-by &= a(x+y)-b(x+y) \\ &= (a-b)(x+y) \end{aligned}$$

14. x^4-6x^2+8를 인수분해하면? (단, 유리수 범위에서 인수분해 하여라.)

① $(x^2-2)(x^2-4)$

② $(x^2-2)(x-4)(x+4)$

③ $(x^2-2)(x-2)(x+2)$

④ $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-2)(x+2)$

⑤ $(x^2-\sqrt{2})(x-2)(x+2)$

해설

$$\begin{aligned} x^4-6x^2+8 &= (x^2)^2-6x^2+8 \\ &= (x^2-2)(x^2-4) \\ &= (x+2)(x-2)(x^2-2) \end{aligned}$$

해설

인수정리를 이용할 수 있다.

$f(x)=x^4-6x^2+8$

$f(2)=0,\quad f(-2)=0,$

즉, $(x-2)(x+2)$로 나누어 떨어지므로

조립제법을 써서 인수분해하면 된다.

15. $(125^2 - 75^2) \div \{5 + (30 - 50) \div (-4)\}$ 의 값은?

① 75　　② 125　　③ 900　　④ 1000　　⑤ 1225

해설

$$\begin{aligned} 125^2 - 75^2 &= (125 + 75)(125 - 75) \\ &= 200 \times 50 = 10000 \end{aligned}$$

$5 + (30 - 50) \div (-4) = 5 + -\dfrac{20}{-4} = 10$

(준 식)$= 10000 \div 10 = 1000$

16. 다항식 x^3-3x-3을 다항식 x^2-2x-1로 나누었을 때의 몫이 $ax+b$이고, 나머지가 $cx+d$이었다. 이 때, $a+b+c+d$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^3-3x-3=(x^2-2x-1)(ax+b)+cx+d$
에서 계수를 비교하면
$a=1,\ -b+d=-3,\ -a-2b+c=-3,\ b-2a=0$
에서 $a=1,\ b=2,\ d=-1,\ c=2$
$\therefore\ a+b+c+d=1+2+(-1)+2=4$

17. 다항식 $2x^3+x^2+3x$를 x^2+1로 나눈 나머지는?

① $x-1$ ② x ③ 1
④ $x+3$ ⑤ $3x-1$

해설

직접 나누어보면

$(2x+1)+\dfrac{x-1}{x^2+1}$

몫 : $2x+1$, 나머지 : $x-1$

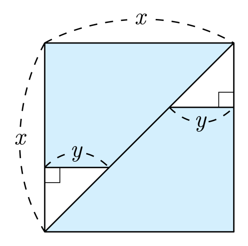
18. x 에 대한 다항식 $A = 2x^3 + 5x^2 + 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x + 1$ 이고, 나머지가 $-6x + 2$ 이다. 이 때, 다항식 B 를 구하면?

① $x^2 + 2x + 2$　　② $x^2 + x + 2$　　③ $x^2 - x + 2$
④ $x^2 - 2x + 2$　　⑤ $x^2 - 3x + 2$

해설

$A = B(2x + 1) - 6x + 2$ 에서
$B(2x + 1) = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2$
$\therefore B = (2x^3 + 5x^2 + 6x + 2) \div (2x + 1)$
$= x^2 + 2x + 2$

19. 다음 그림은 한변의 길이가 x인 정사각형을 대각선을 따라 자른 후 직각이등변삼각형 2개를 떼어낸 도형이다. 이때, 색칠한 부분의 넓이를 x, y에 관한 식으로 나타내어라.



① $xy-y^2$　　② x^2-y^2　　③ x^2-y

④ $\dfrac{xy-y^2}{2}$　　⑤ $\dfrac{x-y}{2}$

해설

$x^2-2\times\dfrac{1}{2}\times y\times y=x^2-y^2$

20. $2x^2-3x-2=a(x-1)(x+2)+bx(x+2)+cx(x-1)$이 x에 대한 항등식이 되도록 $a,\ b,\ c$의 값을 정하면?

① $a=1,\ b=-1,\ c=2$
② $a=-1,\ b=1,\ c=-2$
③ $a=1,\ b=1,\ c=2$
④ $a=-1,\ b=-1,\ c=-2$
⑤ $a=1,\ b=-1,\ c=-2$

해설

수치대입법을 이용한다.
$x=0$을 대입 $-2=-2a \quad \therefore\ a=1$
$x=1$을 대입 $-3=3b \quad \therefore\ b=-1$
$x=-2$를 대입 $12=6c \quad \therefore\ c=2$

21. 다음 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy의 값을 구하여라.

$$(2k+3)x+(3k-1)y+5k-9=0$$

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

k에 대하여 내림차순으로 정리하면
$(2x+3y+5)k+(3x-y-9)=0$
이것은 k에 대한 항등식이므로
$2x+3y+5=0$
$3x-y-9=0$
연립방정식을 풀면 $x=2,\ y=-3$
$\therefore\ xy=2\times(-3)=-6$

22. $(x+y)a-(x-y)b-(y-z)c-4z=0$이 $x,\ y,\ z$의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 곱 abc를 구하면?

① 4　② 8　③ 16　④ 32　⑤ 64

해설

x, y, z에 대해 정리하면
$(a-b)x+(a+b-c)y+(c-4)z=0$
$x,\ y,\ z$에 대한 항등식이므로
$a=b,\ a+b-c=0,\ c=4$
$\therefore\ a=b=2,\ c=4$
$\therefore\ abc=16$

23. a, b는 정수이고, ax^3+bx^2+1이 x^2-x-1로 나누어 떨어질 때, b의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

ax^3+bx^2+1

$=(x^2-x-1)(ax-1)$

$=ax^3-(1+a)x^2+(1-a)x+1$

양변의 계수를 비교하면

$-(1+a)=b, 1-a=0$

$\therefore \quad a=1,\ b=-2$

24. 다항식 x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$가 되도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -7

해설

x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 직접나눈 나머지는
$(a-b+16)x+4b-8$
$(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots$㉠
㉠이 x에 대한 항등식이므로,
$a-b+16=3,\ 4b-8=4$
$\therefore\ a=-10,\ b=3$
$\therefore\ a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10,\ b=3,\ p=-4$를 구해도 된다.

25. x에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0　② 16　③ 32　④ 64　⑤ 1024

해설

$(4x^2-3x+1)^5$을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(4x^2-3x+1)^5 = a_0x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + \cdots + a_9x + a_{10}$과 같이 된다.
여기서 모든 계수들의 합
$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$을 구하려면
$x = 1$을 대입하면 된다.
즉, $(4-3+1)^5 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$
모든 계수들의 합은 $2^5 = 32$

26. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

나머지 정리를 이용한다.
주어진 식에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면,
$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots$ ㉠
$(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면,
$m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{13}{3}$
$\therefore\ m-n=5$

27. x^3-2x^2+a 가 $x+3$ 로 나누어 떨어지도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=45$

해설

$f(-3)=(-3)^3-2(-3)^2+a=a-45=0$

$\therefore\ a=45$

28. 다항식 $f(x)$를 두 일차식 $x-1$, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$　　② $-x+3$　　③ $x-3$

④ $-x-3$　　⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 각각 2, 1이므로
$f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$를 대입하면
$f(1)=a+b=2$, $f(2)=2a+b=1$
두 식을 연립하여 구하면 $a=-1, b=3$
$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x+3$

29. 다항식 $2x^3+ax^2+bx+3$ 이 다항식 $2x^2-x-3$ 으로 나누어 떨어질 때, $a+b$ 의 값은?

① 3　② 1　③ -1　④ -2　⑤ -5

해설

$2x^3+ax^2+bx+3=(2x^2-x-3)Q(x)$
$=(x+1)(2x-3)Q(x)$
$x=-1$ 일 때, $-2+a-b+3=0$
$\therefore\ a-b=-1\cdots$ ㉠
$x=\dfrac{3}{2}$ 일 때, $\dfrac{27}{4}+\dfrac{9}{4}a+\dfrac{3}{2}b+3=0$
$27+9a+6b+12=0$
$\therefore\ 3a+2b=-13\cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 에서 $a=-3,\ b=-2$
$\therefore\ a+b=(-3)+(-2)=-5$

30. $f(x)=2x^3-3x^2+x-k$ 가 $x-2$를 인수로 가질 때, k를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(x)$ 가 $x-2$를 인수로 갖는다는 것은 $f(x)$가 $x-2$로 나누어 떨어진다는 뜻이다.
즉, $f(2)=0$을 만족시키는 k를 구하면,
$f(2)=2\times2^3-3\times2^2+2-k=0$
$\therefore\ k=6$

31. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

x^2-2x-y^2+2y
$=(x^2-y^2)-2(x-y)$
$=(x+y-2)(x-y)$
$=(x+ay)(x-by+c)$
계수를 비교하면
$a=-1, b=-1, c=-2$
$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

32. 등식 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x+a)(x+b)(x+c)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

조립제법을 사용한다

1	1	4	1	-6
		1	5	6
-2	1	5	6	0
		-2	-6	
-3	1	3	0	
		-3		
	1	0		

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3)$

$\therefore a+b+c = 4$

33. 자연수 $N = p^n q^m r^l$ 로 소인수분해될 때, 양의 약수의 개수는 $(n+1)(m+1)(l+1)$ 이다. 이 때, $38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 9 개　② 12 개　③ 16 개　④ 24 개　⑤ 32 개

해설

$38 = x$ 라 하면,

$$\begin{aligned} 38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= (x+1)^3 \\ &= 39^3 \\ &= 13^3 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

$\therefore \quad (3+1)(3+1) = 16$

34. 다항식 $A = 2x^3 - 7x^2 - 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x - 1$, 나머지가 $-7x - 2$ 이다. 다항식 $B = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 14 ⑤ 17

해설

$A = 2x^3 - 7x^2 - 4 = B(2x - 1) - 7x - 2$ 이다.
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = B(2x - 1)$
좌변을 $2x - 1$ 로 나누면
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (2x - 1)(x^2 - 3x + 2)$
$\therefore\ B = x^2 - 3x + 2$

35. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$ 일 때, $(x+y)(y+z)(z+x)$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x+y+z=1$에서
$x+y=1-z$
$y+z=1-x$
$z+x=1-y$
$(x+y)(y+z)(z+x)=(1-z)(1-x)(1-y)$
$=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz$
$=1-1+2-3=-1$

36. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$로 나누면 나머지는 -4이고, 그 몫을 $x+2$로 나누면 나머지는 2이다. 이때, $f(x)$를 $x+2$로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$라 하면
$f(-2)=-5Q(-2)-4$
그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

37. 사차식 $x^4 - 10x^2y^2 + 9y^4$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x-3y$ ② $x-2y$ ③ $x-y$
④ $x+y$ ⑤ $x+3y$

해설

$x^4 - 10x^2y^2 + 9y^4 = \left(x^2 - 9y^2\right)\left(x^2 - y^2\right)$
$= (x-3y)(x+3y)(x-y)(x+y)$

38. 다음 중 $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$ 을 옳게 인수분해 한 것은?

① $(a-b)^2(a+b)^2$ ② $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$
③ $(a-b)^2(a^2+b^2)$ ④ $(a^2-b^2)(a+b)^2$
⑤ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)^2$

해설

$(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$
$=(a^2+b^2-2ab)(a^2+b^2+2ab)$
$=(a-b)^2(a+b)^2$

39. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \text{ (단, } a \neq b \neq c\text{)}$$

① -1 ② 1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 5

해설

$$\text{(준 식)} = \frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$= \frac{(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$= \frac{(c-b)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1$$

40. 자연수 $N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$ 의 양의 약수의 개수를 구하여라.(인수분해공식을 이용하여 푸시오.)

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 49 개

해설

$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a+1)^3$

$\therefore\ N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$

$= (35+1)^3 = 36^3 = 2^6 \times 3^6$

$\therefore$ 약수의 개수 $= (6+1) \times (6+1) = 49$

41. $\dfrac{2010^3-1}{2010\times 2011+1}$ 의 값을 구하면?

① 2007 ② 2008 ③ 2009
④ 20010 ⑤ 2011

해설

$a=2010$ 로 놓으면,

$$(\text{준 식})=\frac{a^3-1}{a(a+1)+1}$$

$$=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}=a-1$$

$$=2009$$

42. $\dfrac{2012^3+1}{2012\times 2011+1}$ 의 값을 a라 할 때, $\dfrac{a+1}{a-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1007}{1006}$

해설

$a=\dfrac{(2012+1)(2012^2-2012+1)}{(2012^2-2012+1)}$

$=2013$ 이므로

$\therefore\ \dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{2013+1}{2013-1}=\dfrac{2014}{2012}=\dfrac{1007}{1006}$

43. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

44. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle ABC$에 대하여 $a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$인 관계가 성립할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$에서 $a^2-ab+b^2=ac+bc-c^2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

45. $x+\frac{1}{x}=1$ 일때, $x^5+\frac{1}{x^5}$ 의 값은?

① 1　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 7

해설

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=1-2=-1$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{1}\right)=1-3=-2$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^5+\frac{1}{x^5}+x+\frac{1}{x}$

$(-1)\times(-2)=x^5+\frac{1}{x^5}+1$

$\therefore\ x^5+\frac{1}{x^5}=1$

해설

$x+\frac{1}{x}=1$ 의 양변에 x를 곱하면

$x^2-x+1=0,\ (x+1)(x^2-x+1)=0,$

$x^3+1=0,\ x^3=-1,\ \frac{1}{x^3}=-1$

$x^5+\frac{1}{x^5}=-x^2-\frac{1}{x^2}=-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$

$=-(-1)=1$

46. $x^{113}+1$ 을 x^3+x 로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라고 하자. 이때, $R(2006)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2007

해설

$$\begin{aligned} x^{113}+1 &= (x^3+x)Q(x)+R(x) \\ &= x(x^2+1)Q(x)+ax^2+bx+c \end{aligned}$$

항등식이므로 $x=0, x^2=-1$ 을 각각 대입하면,

$1=c,\ x+1=-a+bx+c$

$\therefore a=0,\ b=1$

$\therefore R(x)=x+1$

따라서 $R(2006)=2007$

47. x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 5이고, 그 몫을 다시 $x+3$으로 나눈 나머지가 3일 때, $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 30

해설

x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$,
$Q(x)$를 $x+3$으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$P(x)=(x-2)Q(x)+5, Q(x)=(x+3)Q_1(x)+3$이므로
$P(x)=(x-2)\{(x+3)Q_1(x)+3\}+5$
$\quad\quad =(x-2)(x+3)Q_1(x)+3x-1$
$\therefore\ P(-3)=-9-1=-10$
따라서 $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는
$-3P(-3)=-3\times(-10)=30$

해설

나머지정리에 의해 $Q(-3)=3$
$P(x)=(x-2)Q(x)+5$에서 양변에 x를 곱하면
$xP(x)=x(x-2)Q(x)+5x\cdots$①
나머지정리에 의해 $xP(x)$를 $x+3$로 나눈 나머지는 $-3P(-3)$이다.
①의 양변에 $x=-3$을 대입하면
$-3P(-3)=-3\cdot(-5)Q(-3)-15$
$Q(-3)=3$을 대입하면 $-3P(-3)=30$

48. $a^2 - b^2 = 1$ 일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$ 의 값은? (단, n은 자연수)

① 2　　② $2(a+b)^n$　　③ 4

④ $4(a+b)^n$　　⑤ $4(a-b)^n$

해설

$(A)^2 - (B)^2$ 형태이므로
합차공식을 사용하여 정리하면
(준식)$= 4(a+b)^n(a-b)^n = 4(a^2-b^2)^n = 4$

49. $a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)$를 인수분해 하였을 때, 다음 중 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a-b$　　② $b-c$　　③ $c-a$

④ $a+b+c$　　⑤ $ab+bc+ca$

해설

문자가 여러 개일 경우 동차식이면 어느 한 문자에 대하여 정리하고
차수가 다르면 차수가 낮은 문자에 대해 정리한다.

$\therefore$ (준식) $= a^3b^2-a^2b^3+b^3c^2-b^2c^3+c^3a^2-c^2a^3$

$= (b^2-c^2)a^3-(b^3-c^3)a^2+b^2c^2(b-c)$

$= (b-c)\{(b+c)a^3-(b^2+bc+c^2)a^2+b^2c^2\}$

$= (b-c)\{(c^2-a^2)b^2-a^2(c-a)b-a^2c(c-a)\}$

$= (b-c)(c-a)\{(c+a)b^2-a^2b-a^2c\}$

$= (b-c)(c-a)\{(b^2-a^2)c+ab(b-a)\}$

$= (b-c)(c-a)(b-a)\{(b+a)c+ab\}$

$= -(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

따라서 인수가 아닌 것은 ④이다.

50. 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $[a,\ b,\ c] = a^2 + bc$라 하고 $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 + z^2 = 12$일 때, $[x,\ 2y,\ z] + [y,\ 2z,\ x] + [z,\ 2x,\ y]$의 값은?

① 10　　② 22　　③ 88　　④ 100　　⑤ 144

해설

$[x,\ 2y,\ z] + [y,\ 2z,\ x] + [z,\ 2x,\ y]$
$= x^2 + 2yz + y^2 + 2zx + z^2 + 2xy$
$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
$= (x + y + z)^2 = 100$