1. 이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$의 그래프는 x축과 만나고, 이차함수 $y = -x^2 + kx + 2k$의 그래프는 x축과 만나지 않는다. 이때, 정수 k의 개수는?

① 5 개　　② 6 개　　③ 7 개　　④ 8 개　　⑤ 9 개

해설

이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$의 그래프는
x축과 만나므로
$x^2 + 2kx + 1 = 0$의 판별식을 D_1이라 할 때,
$\frac{D_1}{4} = k^2 - 1 \geq 0$,　$(k+1)(k-1) \geq 0$
$\therefore$ $k \leq -1$ 또는 $k \geq 1 \cdots$ ㉠
또, 이차함수 $y = -x^2 + kx + 2k$의 그래프는
x축과 만나지 않으므로
$-x^2 + kx + 2k = 0$의 판별식을 D_2라 할 때,
$D_2 = k^2 + 8k < 0$,　$k(k+8) < 0$
$\therefore$ $-8 < k < 0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $-8 < k \leq -1$
따라서 정수 k는 $-7, -6, \cdots, -2, -1$의 7 개이다.

2. 이차함수 $y = ax^2 + 2x + 4 + 2a\ (a \neq 0\ )$ 의 최댓값이 3 일 때, a 의 값은?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

해설

이차함수에서 최댓값을 가지려면 이차항의 계수 a 의 부호는 음수이다.
주어진 식을 변형 하면

$y = a\left\{x^2 + \frac{2}{a}x + \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{a}\right)^2\right\} + 4 + 2a$

$= a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + 4 + 2a - \frac{1}{a}$

따라서 $x = -\frac{1}{a}$ 일 때,

최댓값 $4 + 2a - \frac{1}{a} = 3$ 을 가진다.

$4 + 2a - \frac{1}{a} = 3$ 에서 $2a - \frac{1}{a} + 1 = 0$

$2a^2 + a - 1 = 0$, $(a+1)(2a-1) = 0$

$\therefore a = -1$ 또는 $a = \frac{1}{2}$

$a = -1(\because\ a < 0)$

3. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 2a - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 2a - 1 = (x - a)^2 - a^2 + 2a - 1$

이므로 $x = a$ 일 때 최솟값 $-a^2 + 2a - 1$ 을 가진다.

$\therefore m = -a^2 + 2a - 1 = -(a - 1)^2$

따라서 m 은 $a = 1$ 일 때, 최댓값 0 을 가진다.

4. x, y가 실수일 때, $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

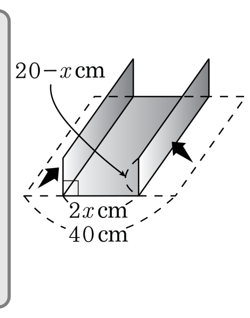
$x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$
$= (x-3)^2 + 2(y+1)^2 - 4$이므로
$x = 3,\ y = -1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

5. 너비가 40 cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 될 때, 높이를 구하면?

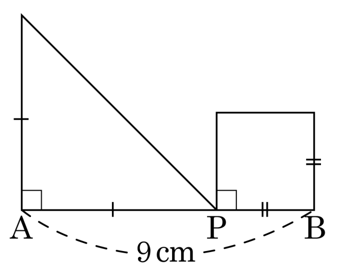
① 10　　② 8　　③ 6　　④ 4　　⑤ 2

해설

직사각형의 가로를 $2x$ 라 하면 세로는 $20-x$ 이다.
단면의 넓이는
$2x(20-x) = -2x^2+40x = -2(x^2-20x+200)+100 = -2(x-10)^2+200$
$\therefore$ $x=10$ 일 때 넓이가 최대이다.



6. 길이가 9 cm 인 선분 AB 위에 점 P 를 잡아서 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형과 정사각형을 만들어 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AP 의 길이는?



① 6cm ② 5.5cm ③ 5cm
④ 4.5cm ⑤ 4cm

해설

선분 AP 의 길이를 x 라 하고 직각이등변삼각형과 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$S = \frac{1}{2}x^2 + (9 - x)^2 = \frac{3}{2}(x - 6)^2 + 27$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}} = 6(\mathrm{cm})$ 일 때 넓이가 최소이다.

7. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 + y - 6) \geq 0$

$y^2 + y - 6 \leq 0$, $(y+3)(y-2) \leq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

8. 함수 $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$t = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면
$y = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 \cdots$ ㉠
또, $t = (x-1)^2 + 2$ 이므로
$t \geq 2 \cdots$ ㉡
㉡의 범위에서 ㉠의 최솟값은
$t = 2$일 때 1이다.

9. 이차함수 $y = x^2 + ax + 1$ 의 그래프와 직선 $y = 3x - 8$ 이 만나지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $-5 < a < -1$ ② $-3 < a < 9$ ③ $-1 < a < 4$

④ $2 < a < 6$ ⑤ $4 < a < 7$

해설

이차방정식 $x^2 + ax + 1 = 3x - 8$,

즉 $x^2 + (a-3)x + 9 = 0$ 이 이차방정식이 허근을 가져야 하므로

$D = (a-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 < 0$

$a^2 - 6a - 27 < 0$

$(a+3)(a-9) < 0$

$\therefore -3 < a < 9$

10. 이차함수 $y=2x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 두 교점의 x좌표가 각각 1, 5일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -81　② -45　③ 0　④ 5　⑤ 14

해설

이차방정식 $2x^2-3x+1=ax+b$, 즉 $2x^2-(3+a)x+1-b=0$의 두 근이 1, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+5=\dfrac{3+a}{2}$, $1\times 5=\dfrac{1-b}{2}$

$\therefore a=9,\ b=-9$

$\therefore ab=-81$

11. 10 원짜리 동전 2 개, 100 원짜리 동전 6 개, 500 원짜리 동전 1 개를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수를 구하여라.

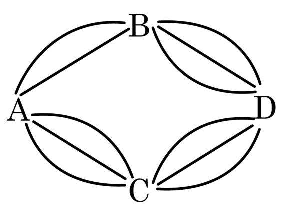
▶ 답 : ＿＿＿＿ 가지

▷ 정답 : 35 가지

해설

10 원짜리 동전 : 0 원, 10 원, 20 원
100 원짜리 동전 : 0 원, 100 원, 200 원, 300 원, 400 원, 500 원, 600 원
500 원짜리 동전 : 0 원, 500 원
그런데 100 원짜리 동전 5 개로 만드는 금액과 500 원짜리 동전 1 개로 만드는 금액이 같으므로 500 원짜리 동전 1 개를 100 원짜리 동전 5 개로 바꾸면 만들 수 있는 금액의 수는 10 원짜리 동전 2 개, 100 원짜리 동전 11 개로 만들 수 있는 금액의 수와 같다.
10 원짜리 동전 : 0, 1, 2 개의 3 가지
50 원짜리 동전 : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 개의 12 가지
이때, 동전을 1 개도 사용하지 않는 경우가 1 가지이므로
금액을 만드는 방법의 수는 $3 \times 12 - 1 = 35$ (가지) 이다.

12. 다음 그림과 같이 A 에서 D 로 가는 도로에서 A 를 출발하여 D 를 거쳐 다시 A 까지 돌아올 때, 모든 경우의 수를 구하여라.



▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 225 가지

해설

A 를 출발하여 D 를 거쳐 다시 A 까지 돌아오는 경우는 모두 네 가지로 나누어 각각의 경우를 살펴보면

1) A − B − D − B − A 로 가는 경우 :

$2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36$ (가지)

2) A − B − D − C − A 로 가는 경우 :

$2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$ (가지)

3) A − C − D − C − A 로 가는 경우 :

$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ (가지)

4) A − C − D − B − A 로 가는 경우 :

$3 \times 3 \times 3 \times 2 = 54$ (가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$36 + 54 + 81 + 54 = 225$ (가지) 이다.

13. 두 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 각각 a , b 라 할 때, $a < b+2$ 일 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 26 가지

해설

$a < b+2$, $a-b < 2$

두 눈의 수를 뺀 값이 1 이하인 경우를 구하면

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),

(3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),

(4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),

(5, 4), (5, 5), (5, 6),

(6, 5), (6, 6)

따라서 26 가지이다.

14. 남학생 4 명과 여학생 3 명을 일렬로 세울 때, 적어도 한 명의 여학생은 다른 여학생들과 떨어져 있게 세우는 방법의 가짓수를 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 4320 가지

해설

여학생 3명이 항상 이웃하려면
(여, 여, 여) 남, 남, 남, 남
을 일렬로 세우면 되므로
$(5\times4\times3\times2\times1)\times(3\times2\times1)=720$ (가지)
따라서 적어도 한 명의 여학생이 다른 여학생들과 떨어져 세우는 방법의 가짓수는
$(7\times6\times5\times4\times3\times2\times1)-720=5040-720=4320$(가지) 이다.

15. 5장의 카드로 다섯 자리의 수를 만들어서 큰 수부터 나열할 때, 80 번째의 수를 구하여라.

0	1	2	3	4

▶ 답 :

▷ 정답 : 13402

해설

만의 자리 숫자가 4 일 때 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (가지)
만의 자리 숫자가 3 일 때 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (가지)
만의 자리 숫자가 2 일 때 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (가지)
80 번째 번의 수는 만의 자리 숫자가 1 인 수 중에서 8 째 번으로 큰 수이다.
14320, 14302, 14230, 14203, 14032, 14023, 13420, 13402

16. 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중 4 개의 숫자를 한 번씩만 사용하여 만들 수 있는 4 자리 수 중 2 의 배수 또는 3 의 배수인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 72 가지

해설

2 의 배수는 끝자리가 2 의 배수인 경우이므로
○○○0 인 경우 : $4\times3\times2=24$ (가지)
○○○2 인 경우 : 이때, 맨 앞자리에 0 이 올 수 없으므로 $3\times3\times2=18$ (가지)
○○○4 인 경우 : 이때, 맨 앞자리에 0 이 올 수 없으므로 $3\times3\times2=18$ (가지)
따라서 $24+18+18=60$ (가지)
3 의 배수는 각 자리 숫자의 합이 3 의 배수인 경우이므로
각 자리 숫자의 합이 6 인 경우 : 0, 1, 2, 3 로 만들 수 있는 네 자리의 자연수 $3\times3\times2\times1=18$ (가지)
각 자리 숫자의 합이 9 인 경우 : 0, 2, 3, 4 로 만들 수 있는 네 자리의 자연수 $3\times3\times2\times1=18$ (가지)
따라서 $18+18=36$ (가지)
6 의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3 의 배수이면서 끝자리에 2 의 배수가 와야 하므로
0, 1, 2, 3으로 만들 수 있는 6의 배수는
○○○0에서 $3\times2\times1=6$ (가지)
○○○2에서 $2\times2\times1=4$ (가지)
0, 2, 3, 4로 만들 수 있는 6의 배수는
○○○0에서 $3\times2\times1=6$ (가지)
○○○2에서 $2\times2\times1=4$ (가지)
○○○4에서 $2\times2\times1=4$ (가지)
따라서 $6+4+6+4+4=24$ (가지)
구하는 경우의 수는 $60+36-24=72$ (가지)이다.

17. 남학생 4명, 여학생 5명의 후보가 있는 가운데 남녀 각각 회장과 부회장을 1명씩 뽑는 경우의 수를 구하면?

① 48　② 120　③ 240　④ 360　⑤ 720

해설

남학생 중에서 회장을 뽑는 경우 4가지, 부회장을 뽑는 경우 3가지이므로 $4 \times 3 = 12$(가지) 이고, 여학생 중에서 회장을 뽑는 경우 5가지, 부회장을 뽑는 경우 4가지이므로 $5 \times 4 = 20$가지가 된다. 따라서 남녀 각각 회장와 부회장을 1명씩 뽑는 경우의 수는 $12 \times 20 = 240$(가지) 이다.

18. 남학생 3 명, 여학생 3 명을 일렬로 세울 때, 어느 남학생끼리도 이웃하지 않고, 어느 여학생끼리도 서로 이웃하지 않도록 세우는 경우의 수는?

① 12 가지　　② 24 가지　　③ 48 가지
④ 60 가지　　⑤ 72 가지

해설

남학생끼리 이웃하지 않고, 여학생끼리도 서로 이웃하지 않도록 세우는 경우는 남학생과 여학생을 번갈아 가며 세우는 것이다. (남, 여, 남, 여, 남, 여), (여, 남, 여, 남, 여, 남) 의 두 경우에서 각각 남학생과 여학생을 세우는 방법의 수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (가지) 이다. 따라서 (남, 여, 남, 여, 남, 여) 로 세우는 경우는 $6 \times 6 = 36$ (가지) 이고 (여, 남, 여, 남, 여, 남) 의 경우도 36 가지이므로 구하는 경우의 수는 72 가지이다.

19. 다음 그림과 같이 생긴 자물쇠가 있다. 이 자물쇠 앞면의 여섯 개의 알파벳 중에서 순서대로 알파벳 네 개를 누르면 열리도록 설계하려고 한다. 자물쇠의 비밀번호로 만들 수 있는 총 경우의 수는?

① 30 ② 42 ③ 120 ④ 360 ⑤ 720

해설

여섯 개의 알파벳 중에 네 개를 선택하여 일렬로 세우는 경우의 수는 $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ (가지)이다.

20. 5 개의 문자 a , b , c , d , e 를 사용하여 만들어지는 120 개의 문자를 사전식으로 $abcde$ 에서 $edcba$ 까지 나열하였다. 이 때, $bdcea$ 는 몇 번째에 있는지 구하여라.

▶ 답 : ______ 번째

▷ 정답 : 40 번째

해설

$a \times\times\times\times$: $4\times3\times2\times1=24$

$ba\times\times\times$, $bc\times\times\times$: $(3\times2\times1)\times2=12$

$bda\times\times$: 2

다음에 오는 문자는 $bdcae$, $bdcea$ 이므로 40 번째가 된다.