

1. 다음 수열이 조화수열을 이룰 때, (가)에 알맞은 수는?

6, 3, 2, (가)

- ①  $\frac{1}{2}$       ② 1      ③  $\frac{3}{2}$       ④  $\frac{1}{3}$       ⑤  $\frac{2}{3}$

해설

주어진 수열이 조화수열이면 각 항의 역수로 이루어진 수열  $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{(가)}$ 이 등차수열이므로 이 등차수열의 공차는  $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ 이다.

따라서  $\frac{1}{(가)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \therefore (가) = \frac{3}{2}$

2. 오른쪽 표에서 가로줄, 세로줄 각각이 모두 등비수열을 이룰 때,  $a + b + c + d$ 의 값은?(단,  $a, b, c, d$ 는 양수)

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| 1   | 3   | $a$ |
| 2   | $b$ | 18  |
| $c$ | 12  | $d$ |

① 51      ② 52      ③ 53      ④ 54      ⑤ 55

해설

|   |    |    |
|---|----|----|
| 1 | 3  | 9  |
| 2 | 6  | 18 |
| 4 | 12 | 36 |

$$a + b + c + d = 9 + 6 + 4 + 36 = 55$$

3. 다음 표에 적당한 수를 넣어 각 행과 각 열이 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 12개의 빈 칸에 들어갈 수들의 총합을 구하여라.

|    |  |  |    |
|----|--|--|----|
| 1  |  |  | 7  |
|    |  |  |    |
|    |  |  |    |
| 10 |  |  | 34 |

▶ 답 :

▷ 정답 : 156

해설

다음 표와 같이 빈 칸에 문자를 대응시키자.

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 1   | $a$ | $b$ | 7   |
| $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $i$ | $j$ |
| 10  | $k$ | $l$ | 34  |

각 행과 열이 각각 등차수열을 이루므로

$$a + b = 1 + 7 = 8$$

$$k + l = 10 + 34 = 44$$

$$c + g = 1 + 10 = 11$$

$$f + j = 7 + 34 = 41$$

$$\text{또, } (d + e) + (h + i) = (c + f) + (g + j)$$

$$= (c + g) + (f + j) = 11 + 41 = 52$$

이므로 구하는 총합은

$$8 + 44 + 11 + 41 + 52 = 156$$

4. 첫째항이  $-10$ 인 등차수열  $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제7항까지의 합과 제7항이 같을 때 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 80

해설

$$a_1 = -10, a_7 = -10 + 6d$$

$$S_7 = \frac{7\{2 \cdot (-10) + 6d\}}{2}, a_7 = S_7 \text{에서 } d = 4$$

$$S_{10} = \frac{10\{2 \cdot (-10) + 9 \cdot 4\}}{2} = 80$$

5. 등차수열  $\{a_n\}$  에서  $a_4 + a_7 + a_{10} = 11$ ,  $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 20$  일 때,  $a_{50}$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$a_n = a + (n - 1)d$  라고 하면

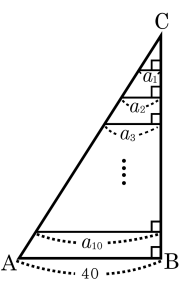
$$a_4 + a_7 + a_{10} = 3a + 18d = 11$$

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 5a + 35d = 20$$

$$\therefore a = \frac{5}{3}, d = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a_{50} = 18$$

6. 오른쪽 그림과 같이 밑변  $AB$ 의 길이가 40인 직각삼각형  $ABC$ 가 있다. 변  $AC$ 를 11등분하여 변  $AB$ 와 평행한 10개의 선분을 그려 그 길이를 각각  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 이라 할 때,  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

$a_1 + a_{10} = 40, a_2 + a_9 = 40, \dots, a_5 + a_6 = 40$ 이므로  
 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 40 \times 5 = 200$

7. 각 항이 실수인 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_1 + a_3 = \frac{5}{6}$ ,  $a_2 a_3 a_4 = \frac{1}{8}$  일 때, 첫째항의 값은?

- ①  $\frac{1}{9}$       ②  $\frac{1}{3}$       ③  $\frac{1}{4}$       ④  $\frac{1}{2}$       ⑤ 1

해설

등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_3 = \frac{5}{6} \text{에서, } a_1 + a_1 r^2 = \frac{5}{6}$$

$$a_2 a_3 a_4 = \frac{1}{8} \text{에서 } (a_1 r^2)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\text{즉, } a_3 = a_1 r^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

8. 다항식  $x^9 + x^8 + \cdots + x + 1$  을  $x - 2$ 로 나누었을 때의 나머지는?

- ① 511      ② 512      ③ 513      ④ 1023      ⑤ 1025

해설

$f(x) = x^9 + x^8 + \cdots + x + 1$  이라 하면

$f(x)$  를  $x - 2$ 로 나누었을 때의 나머지는  $f(2)$  이다.

즉,  $f(2) = 2^9 + 2^8 + \cdots + 2 + 1$

따라서  $f(2)$ 는 첫째항이 1, 공비가 2, 항수가 10인 등비수열의 합과 같다.

$$\therefore f(2) = \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1023$$

9. 등비수열  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$  에서 첫째항부터 제  $n$  항까지의 합을  $S_n$  이라 할 때,  $|S_n - 1| < 0.001$  을 만족하는 자연수  $n$  의 최솟값은?

① 8                      ② 9                      ③ 10                      ④ 11                      ⑤ 12

해설

$$a_1 = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right\}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\therefore |S_n - 1| = \left| 1 - \frac{1}{2^n} - 1 \right| = \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^n} < 0.001 = \frac{1}{1000}$$

1000 <  $2^n$  인  $n$  의 최솟값을 구하면 된다.

그런데  $2^{10} = 1024$ ,  $2^9 = 512$  이므로  $2^n > 1000$  인  $n$  의 최솟값은 10

10. 갑은 2001년 말부터 2012년까지 매년 초에 300만원 씩 모두 12회를 금융기관에 적립한 것을 2012년 말에 그 원리금을 모두 인출하고 그대로 2013년 초에 금융기관에 다시 예금하여 12년 동안 두었다가 2024년 말에 그 원리금을 모두 인출하기로 하였다. 이때, 갑이 2024년말에 인출한 원리금액은?(단, 연이율 6%의 복리로 하고,  $1.06^{12} = 2.01$ 로 계산한다.)

- ① 약 10540만 원      ② 약 10650만 원      ③ 약 10760만 원
- ④ 약 10870만 원      ⑤ 약 10980만 원

해설

2012년 말의 원리금  $S_{12}$ 를 구하면  
$$S_{12} = 300 \times 1.06 + 300 \times 1.06^2 + \cdots + 300 \times 1.06^{12}$$
$$= \frac{300 \times 1.06 \times (1.06^{12} - 1)}{1.06 - 1}$$
$$= \frac{300 \times 1.06 \times 1.01}{0.06} = 5353(\text{만원})$$
따라서 2024년 말의 원리금을 구하면  
$$S_{24} = S_{12} \times 1.06^{12}$$
$$= 5353 \times 2.01 = 10759.53(\text{만 원})$$
따라서 구하는 금액은 약 10760만 원이다.

11. 첫째항이  $a(a \neq 2)$  이고 둘째항이  $b$  인 등차수열  $\{a_n\}$  의 항 중에 2가 존재하기 위한 필요충분조건은?

①  $\frac{a-2}{a-b}$  가 자연수

②  $\frac{a+b}{a-2}$  가 자연수

③  $\frac{a-2}{b-a}$  가 자연수

④  $\frac{a+b}{b+2}$  가 자연수

⑤  $\frac{b-2}{b-a}$  가 자연수

해설

등차수열  $\{a_n\}$  의 공차가  $b-a$  이므로 일반항  $a_n$  은  $a_n = a + (n-1)(b-a)$

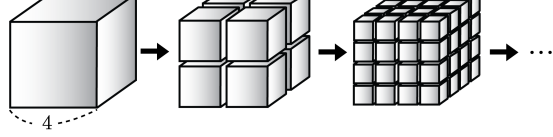
그런데 수열  $\{a_n\}$  중 2인 항이 존재하므로 그 항을  $m$  으로 놓으면

$$a_m = 2 = a + (b-a)(m-1), \text{ 즉, } m-1 = \frac{a-2}{a-b}$$

그런데  $a \neq 2$  이므로  $m-1 \neq 0$

즉,  $m-1$  은 0이 아닌 자연수이므로  $\frac{a-2}{a-b}$  는 자연수이다.

12. 한 변의 길이가 4인 정육면체가 있다. 다음은 이 정육면체의 각 모서리를 수직이등분하여 분리된 정육면체들을 나타낸 것이다. 이와 같은 시행을 계속해 나갈 때, 5회 시행 후 분리된 모든 정육면체의 겉넓이의 합은?



- ①  $3 \times 2^{10}$                       ②  $3 \times 2^{12}$                       ③  $3 \times 2^{15}$   
 ④  $3 \times 2^{17}$                       ⑤  $3 \times 2^{20}$

해설

분리된 정육면체의 개수와 한 변의 길이는 다음 표와 같다.

|         | 정육면체의 개수 | 한 변의 길이       |
|---------|----------|---------------|
| 1회 시행 후 | $2^3$    | 2             |
| 2회 시행 후 | $2^6$    | 1             |
| 3회 시행 후 | $2^9$    | $\frac{1}{2}$ |
| 4회 시행 후 | $2^{12}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 5회 시행 후 | $2^{15}$ | $\frac{1}{8}$ |

∴ 5회 시행 후 겉넓이의 합은  $\left(\frac{1}{8}\right)^2 \times 6 \times 2^{15} = 3 \times 2^{10}$