1. 다음 수열이 조화수열을 이룰 때, (가)에 알맞은 수는?

6, 3, 2, (가)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 수열이 조화수열이면 각 항의 역수로 이루어진 수열 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{(가)}$ 이 등차수열이므로 이 등차수열의 공차는 $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{(가)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \quad \therefore \ (가) = \frac{3}{2}$

2. 오른쪽 표에서 가로줄, 세로줄 각각이 모두 등비수열을 이룰 때, $a+b+c+d$의 값은?(단, a, b, c, d는 양수)

1	3	a
2	b	18
c	12	d

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

해설

1	3	9
2	6	18
4	12	36

$$a+b+c+d=9+6+4+36=55$$

3. 다음 표에 적당한 수를 넣어 각 행과 각 열이 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 12개의 빈 칸에 들어갈 수들의 총합을 구하여라.

1			7
10			34

▶ 답 :

▷ 정답 : 156

해설

다음 표와 같이 빈 칸에 문자를 대응시키자.

1	a	b	7
c	d	e	f
g	h	i	j
10	k	l	34

각 행과 열이 각각 등차수열을 이루므로

$a+b=1+7=8$

$k+l=10+34=44$

$c+g=1+10=11$

$f+j=7+34=41$

또, $(d+e)+(h+i)=(c+f)+(g+j)$

$=(c+g)+(f+j)=11+41=52$

이므로 구하는 총합은

$8+44+11+41+52=156$

4. 첫째항이 -10인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제7항까지의 합과 제7항이 같을 때 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 80

해설

$a_1 = -10,\ a_7 = -10 + 6d$

$S_7 = \dfrac{7\{2 \cdot (-10) + 6d\}}{2},\ a_7 = S_7$에서 $d = 4$

$S_{10} = \dfrac{10\{2 \cdot (-10) + 9 \cdot 4\}}{2} = 80$

5. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_4 + a_7 + a_{10} = 11$, $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 20$ 일 때, a_{50}의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 18

해설

$a_n = a + (n-1)d$라고 하면

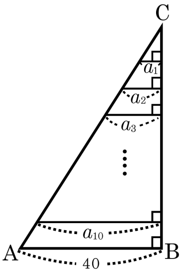
$a_4 + a_7 + a_{10} = 3a + 18d = 11$

$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 5a + 35d = 20$

$\therefore\ a = \frac{5}{3},\ d = \frac{1}{3}$

$\therefore\ a_{50} = 18$

6. 오른쪽 그림과 같이 밑변 AB의 길이가 40인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AC를 11등분하여 변 AB와 평행한 10개의 선분을 그려 그 길이를 각각 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_{10}$이라 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

$a_1+a_{10}=40,\ a_2+a_9=40, \cdots, a_5+a_6=40$이므로
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=40\times5=200$

7. 각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_3 = \frac{5}{6}$, $a_2 a_3 a_4 = \frac{1}{8}$일 때, 첫째항의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1 + a_3 = \frac{5}{6}$에서, $a_1 + a_1 r^2 = \frac{5}{6}$

$a_2 a_3 a_4 = \frac{1}{8}$에서 $(a_1 r^2)^3 = \frac{1}{8}$

즉, $a_3 = a_1 r^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore\ a_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

8. 다항식 $x^9 + x^8 + \cdots + x + 1$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는?

① 511 ② 512 ③ 513 ④ 1023 ⑤ 1025

해설

$f(x) = x^9 + x^8 + \cdots + x + 1$이라 하면
$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $f(2)$이다.
즉, $f(2) = 2^9 + 2^8 + \cdots + 2 + 1$
따라서 $f(2)$는 첫째항이 1, 공비가 2, 항수가 10인 등비수열의 합과 같다.

$$\therefore f(2) = \frac{2^{10}-1}{2-1} = 2^{10} - 1 = 1023$$

9. 등비수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ 에서 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $|S_n - 1| < 0.001$을 만족하는 자연수 n의 최솟값은?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

$a_1 = \frac{1}{2}, \ r = \frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\therefore |S_n - 1| = |1 - \frac{1}{2^n} - 1| = \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^n} < 0.001 = \frac{1}{1000}$$

$1000 < 2^n$ 인 n의 최솟값을 구하면 된다.

그런데 $2^{10} = 1024, \ 2^9 = 512$ 이므로 $2^n > 1000$ 인 n의 최솟값은10

10. 갑은 2001년 말부터 2012년까지 매년 초에 300만원 씩 모두 12회를 금융기관에 적립한 것을 2012년 말에 그 원리금을 모두 인출하고 그대로 2013년 초에 금융기관에 다시 예금하여 12년 동안 두었다가 2024년 말에 그 원리금을 모두 인출하기로 하였다. 이때, 갑이 2024년말에 인출한 원리금액은?(단, 연이율 6%의 복리로 하고, $1.06^{12} = 2.01$로 계산한다.)

① 약 10540만 원　② 약 10650만 원　③ 약 10760만 원

④ 약 10870만 원　⑤ 약 10980만 원

해설

2012년 말의 원리금 S_{12}를 구하면

$S_{12} = 300 \times 1.06 + 300 \times 1.06^2 + \cdots + 300 \times 1.06^{12}$

$= \dfrac{300 \times 1.06 \times (1.06^{12} - 1)}{1.06 - 1}$

$= \dfrac{300 \times 1.06 \times 1.01}{0.06} = 5353$(만원)

따라서 2024년 말의 원리금을 구하면

$S_{24} = S_{12} \times 1.06^{12}$

$= 5353 \times 2.01 = 10759.53$(만 원)

따라서 구하는 금액은 약 10760만 원이다.

11. 첫째항이 $a(a \neq 2)$ 이고 둘째항이 b 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 항 중에 2가 존재하기 위한 필요충분조건은?

① $\dfrac{a-2}{a-b}$ 가 자연수

② $\dfrac{a+b}{a-2}$ 가 자연수

③ $\dfrac{a-2}{b-a}$ 가 자연수

④ $\dfrac{a+b}{b+2}$ 가 자연수

⑤ $\dfrac{b-2}{b-a}$ 가 자연수

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 $b-a$ 이므로 일반항 a_n 은 $a_n = a + (n-1)(b-a)$

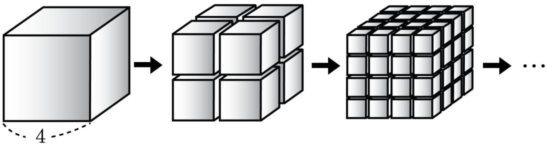
그런데 수열 $\{a_n\}$ 중 2인 항이 존재하므로 그 항을 m 으로 놓으면

$a_m = 2 = a + (b-a)(m-1)$, 즉, $m-1 = \dfrac{a-2}{a-b}$

그런데 $a \neq 2$ 이므로 $m-1 \neq 0$

즉, $m-1$ 은 0이 아닌 자연수이므로 $\dfrac{a-2}{a-b}$ 는 자연수이다.

12. 한 변의 길이가 4인 정육면체가 있다. 다음은 이 정육면체의 각 모서리를 수직이등분하여 분리된 정육면체들을 나타낸 것이다. 이와 같은 시행을 계속해 나갈 때, 5회 시행 후 분리된 모든 정육면체의 겉넓이의 합은?



① 3×2^{10}　② 3×2^{12}　③ 3×2^{15}
④ 3×2^{17}　⑤ 3×2^{20}

해설

분리된 정육면체의 개수와 한 변의 길이는 다음 표와 같다.

	정육면체의 개수	한 변의 길이
1회 시행 후	2^3	2
2회 시행 후	2^6	1
3회 시행 후	2^9	$\frac{1}{2}$
4회 시행 후	2^{12}	$\frac{1}{4}$
5회 시행 후	2^{15}	$\frac{1}{8}$

$\therefore$ 5회 시행 후 겉넓이의 합은 $\left(\frac{1}{8}\right)^2\times 6\times 2^{15}=3\times 2^{10}$