

1. 이차방정식 $3x^2 + 7x + 1 = 0$ 의 해가 $\frac{B \pm \sqrt{C}}{A}$ 일 때, $A + B + C$ 의 값을 구하여라. (단, A, B 는 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 3 \times 1}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{6}$$

$A = 6, B = -7, C = 37$ 이므로

$$\therefore A + B + C = 36$$

2. 이차방정식 $x^2 - 7x + 3m + 1 = 0$ 의 두 근의 합이 $-n$ 일 때, $n^2 - n - 3$ 의 값을 구하여라. (단, n 은 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 53

해설

이차방정식 $x^2 - 7x + 3m + 1 = 0$ 의
두 근의 합은 7이므로 $n = -7$ 이다.
 $\therefore n^2 - n - 3 = (-7)^2 - (-7) - 3 = 53$

3. 이차방정식 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 의 두 근의 곱이 방정식 $2x^2 - 3x - k = 0$ 의 근일 때, 상수 k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - 4x + 2 = 0$ 에서 (두 근의 곱) = 2
 $2x^2 - 3x - k = 0$ 에 $x = 2$ 를 대입하면
 $8 - 6 - k = 0$
 $\therefore k = 2$

4. 이차방정식 $x^2 + bx + a + 1 = 0$ 의 근이 $-4, -1$ 일 때, $ax^2 - bx - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ 0 ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

두 근이 $-4, -1$ 이므로

$$(x+4)(x+1) = 0$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0 \text{에서}$$

$$a = 3, b = 5$$

$3x^2 - 5x - 2 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\therefore \alpha\beta = -\frac{2}{3}$$

5. 어떤 수의 제곱에서 어떤 수를 뺀 것은 72 라고 할 때, 이것을 만족하는 수들의 합을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

어떤 수를 x 라 하면

$$x^2 - x = 72$$

$$x^2 - x - 72 = 0$$

$$x = 9 \text{ 또는 } x = -8$$

$$\therefore 9 + (-8) = 1$$

6. 동화책을 펼쳤더니 펼쳐진 두 쪽수의 곱이 156이었을 때, 앞 쪽의 쪽수는?

- ① 10쪽 ② 12쪽 ③ 14쪽 ④ 16쪽 ⑤ 18쪽

해설

두 쪽수를 x , $x + 1$ 이라 하면

$$x(x + 1) = 156$$

$$x^2 + x - 156 = 0$$

$$(x + 13)(x - 12) = 0$$

$x > 0$ 이므로 $x = 12$ (쪽)

7. 길이가 24cm 인 철사로 넓이가 32cm^2 인 직사각형을 만들려고 한다. 가로 길이가 세로 길이보다 길 때, 이 직사각형의 가로 길이는?

① 8cm ② 7cm ③ 6cm ④ 5cm ⑤ 4cm

해설

가로의 길이를 $x\text{cm}$ 라 하면 세로의 길이는 $(12-x)\text{cm}$
또, (가로의 길이) > (세로의 길이) 이므로 $x > 12-x$, 즉 $x > 6$ 이다.

$$x(12-x) = 32$$

$$(x-4)(x-8) = 0$$

$$x = 4 \text{ 또는 } x = 8$$

$\therefore x > 6$ 이므로 $x = 8$ 이다.

따라서 가로의 길이는 8cm이다.

8. 어떤 정사각형에서 각 변의 길이를 2cm 씩 늘인 정사각형의 넓이는 2cm 씩 줄인 정사각형의 넓이의 9 배가 된다고 한다. 처음 정사각형의 한 변의 길이는?

① 4cm ② 5cm ③ 6cm ④ 7cm ⑤ 8cm

해설

처음 정사각형의 한 변의 길이를 x cm 라고 하면

$$(x+2)^2 = 9(x-2)^2$$

$$8x^2 - 40x + 32 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$x = 1, 4$$

$x > 2$ 이므로 $x = 4$ (cm) 이다.

9. 다음은 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 을 푸는 과정이다. ① ~ ⑤에 들어갈 식이 바르지 못한 것은?

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= 0 \\
 x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\
 x^2 + \frac{b}{a}x + \text{①} &= -\frac{c}{a} + \text{①} \\
 (x + \text{②})^2 &= \text{③} \\
 x &= \text{④} \pm \text{⑤}
 \end{aligned}$$

- ① $\frac{b^2}{4a^2}$ ② $\frac{b}{2a}$ ③ $\frac{b^2 - 4ac}{2a}$
 ④ $-\frac{b}{2a}$ ⑤ $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

해설

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= 0 \leftarrow \text{양변을 } a \text{ 로 나눈다.} \\
 x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \leftarrow \text{양변에 } \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} \text{ 을 더한다.} \\
 x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
 x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 \therefore \text{③이 잘못되었다.}
 \end{aligned}$$

10. 이차방정식 $2x^2 - 9x - ax + 3a + 8 = 0$ 이 정수의 근을 가질 때, 정수 a 의 값들의 합을 구하면?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면 $-a(x-3) + 2x^2 - 9x + 8 = 0$ 이다.

$$\begin{aligned} a &= \frac{2x^2 - 9x + 8}{x-3} \\ &= \frac{(x-3)(2x-3) - 1}{x-3} \\ &= 2x - 3 - \frac{1}{x-3} \end{aligned}$$

a 는 정수이므로 $x-3 = \pm 1$ 이다.

$x = 2$ 또는 $x = 4$ 이므로

(i) $x = 2$ 일 때, $a = 2$

(ii) $x = 4$ 일 때, $a = 4$ 이다.

따라서 정수 a 의 값들의 합은 $2 + 4 = 6$ 이다.

11. 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{5}{6} = 0$ 의 두 근이 $x = \frac{a \pm \sqrt{b}}{c}$ 이다. 이 때, $a + b - c$ 의 값은?

- ① 38 ② -41 ③ 30 ④ -15 ⑤ 24

해설

양변에 6 을 곱하면 $3x^2 + 14x + 5 = 0$

근의 짝수공식을 이용하여 풀면

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 15}}{3} = \frac{-7 \pm \sqrt{34}}{3}$$

$\therefore a = -7, b = 34, c = 3$

$\therefore a + b - c = -7 + 34 - 3 = 24$

12. 이차방정식 $x^2 - kx + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2$ 이다. 이 때, 상수 k 의 값은?

- ① -4 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

이차방정식 $x^2 - kx + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta = k$, $\alpha\beta = 2$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{k}{2} = 2$$

$$\therefore k = 4$$

13. 한 근이 $3 + \sqrt{6}$ 인 이차방정식 $ax^2 - 2x + b = 0$ 이 있을 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? (단, a, b 는 유리수)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$ax^2 - 2x + b = 0$ 의 계수가 모두 유리수이므로
 $3 + \sqrt{6}$ 가 근이면 $3 - \sqrt{6}$ 도 근이다.

$$\frac{b}{a} = (3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6}) = 3$$

$$\therefore \frac{b}{a} = 3$$

14. 이차방정식 $x^2 - 6x - 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은? (단, x^2 의 계수는 4이다.)

① $6x^2 + 4x - 1 = 0$ ② $3x^2 + 6x + 1 = 0$

③ $2x^2 + 6x + 1 = 0$ ④ $4x^2 + 6x + 1 = 0$

⑤ $4x^2 + 6x - 1 = 0$

해설

이차방정식 $x^2 - 6x - 4 = 0$ 의 두 근이 α, β 일때, $\alpha + \beta = 6$,
 $\alpha\beta = -4$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = 0$$

양변에 4를 곱하면 $4x^2 + 6x - 1 = 0$

15. 지면에서 20m 의 높이에서 초속 50m 로 똑바로 쏘아올린 물체의 x 초 후의 높이는 $(-5x^2 + 50x + 20)$ m 가 된다고 한다. 물체의 높이가 지면에서 145m 가 되는 데 걸리는 시간을 구하는 식과 물체의 높이가 지면에서 145m 가 되는 데 걸리는 시간은?

① $-5x^2 + 50x + 20 = 125$, 5 초

② $-5x^2 + 50x + 20 = 125$, 10 초

③ $-5x^2 + 50x + 20 = 145$, 5 초

④ $-5x^2 + 50x + 20 = 145$, 10 초

⑤ $5x^2 - 50x - 20 = 145$, 5 초

해설

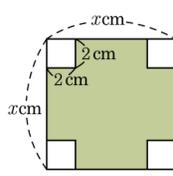
$$-5x^2 + 50x + 20 = 145$$

$$5x^2 - 50x + 125 = 0$$

$$5(x^2 - 10x + 25) = 5(x - 5)^2 = 0$$

$$\therefore x = 5$$

16. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 x cm 인 정사각형모양의 두꺼운 종이의 네 귀퉁이에서 한 변의 길이가 2 cm 인 정사각형을 각각 잘라내어 만든 상자의 부피가 50 cm^3 일 때, x 의 값은?



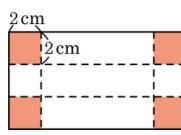
- ① $2 + \sqrt{5}$ ② 4 ③ $4 - \sqrt{5}$
 ④ 9 ⑤ $4 + 2\sqrt{5}$

해설

$$(x-4)^2 \times 2 = 50$$

$$\therefore x = 9 (\because x > 0)$$

17. 가로가 세로보다 5 cm 더 긴 직사각형 모양의 종이가 있다. 네 모퉁이에서 그림과 같이 한 변이 2cm 인 정사각형을 잘라 부피가 28 cm^3 인 상자를 만들었다. 처음 직사각형 모양의 종이의 넓이를 구하여라.



▶ 답: $\underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$

▷ 정답: 66 cm^2

해설

세로의 길이 : $x \text{ cm}$, 가로의 길이 : $x + 5 \text{ cm}$ 라고 하면,
 $2(x - 4)(x + 5 - 4) = 28$
 $2x^2 - 6x - 8 - 28 = 0$
 $x^2 - 3x - 18 = 0$
 $(x - 6)(x + 3) = 0$, $x = 6$
 따라서 처음 직사각형의 넓이는 $x(x + 5) = 6(6 + 5) = 66(\text{cm}^2)$ 이다.

18. $(x+y+4)(x+y) = 12$ 일 때, $x+y$ 의 값의 합을 구하면?

- ① 2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ 10

해설

$A = x+y$ 라 하면
 $(A+4)A = 12$
 $A^2 + 4A - 12 = 0$
 $(A-2)(A+6) = 0$
 $\therefore A = 2$ 또는 $A = -6$
따라서 $x+y$ 의 값의 합은 $2 + (-6) = -4$ 이다.

19. 이차방정식 $x^2 + 2x - k = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, $kx^2 + 4x - 1 = 0$ 의 근에 대한 설명 중 옳은 것은? (단, $k \neq 0$)

- ① 서로 다른 두 실근을 갖는다.
② 중근을 갖는다.
③ 근이 없다.
④ k 의 값에 따라 달라진다.
⑤ 주어진 조건만으로는 구할 수 없다.

해설

$x^2 + 2x - k = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 (판별식) > 0 이다.

$$D = 2^2 - 4 \times 1 \times (-k) > 0 \rightarrow 4(k + 1) > 0$$

$$\therefore k > -1$$

방정식 $kx^2 + 4x - 1 = 0$ 에서

$$D = 4^2 - 4 \times k \times (-1) = 4(4 + k) > 0 (\because k > -1)$$

따라서 방정식 $kx^2 + 4x - 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

20. 이차방정식 $x^2 + mx + n = 0$ 의 두 근은 연속하는 홀수이다. 두 근의 제곱의 차가 24일 때, $n - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

$x^2 + mx + n = 0$ 의 두 근을 $a, a + 2$ (단, a 는 홀수)로 놓으면

$$m = -2a - 2, n = a^2 + 2a$$

$$(a + 2)^2 - a^2 = 24$$

$$4a + 4 = 24, 4a = 20, a = 5$$

$$m = -2 \times 5 - 2 = -12$$

$$\therefore n = 25 + 10 = 35$$

$$\therefore n - m = 35 + 12 = 47$$

21. x^2 의 계수가 1인 어떤 이차방정식을 x 의 계수를 잘못 보고 풀었더니 해가 1, 5이었고, 상수항을 잘못 보고 풀었더니 해가 -2, -4이었다. 이 방정식의 옳은 근은?

① 2, 5

② 2, -5

③ 1, 5

④ 1, 2

⑤ -1, -5

해설

원래 이차방정식을 $x^2 + ax + b = 0$ 이라 하면
 $b = 1 \times 5 = 5$, $-a = -2 + (-4) = -6$, $a = 6$
따라서 $x^2 + 6x + 5 = 0$, $(x+1)(x+5) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = -5$

해설

$(x-1)(x-5) = 0$, $x^2 - 6x + 5 = 0$
일차항의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 5
 $(x+2)(x+4) = 0$, $x^2 + 6x + 8 = 0$
상수항을 잘못 보았으므로 x 의 계수는 6
따라서 $x^2 + 6x + 5 = 0$, $(x+1)(x+5) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = -5$

22. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 한 근을 a , 이차방정식 $x^2 - 2x - 7 = 0$ 의 한 근을 b 라 할 때, $(a^2 - 3a + 3)(b^2 - 2b + 1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

두 방정식에 각각 $x = a$, $x = b$ 를 대입하면
 $a^2 - 3a + 1 = 0$ 에서 $a^2 - 3a = -1$
 $b^2 - 2b - 7 = 0$ 에서 $b^2 - 2b = 7$
 $\therefore (a^2 - 3a + 3)(b^2 - 2b + 1) = (-1 + 3)(7 + 1) = 16$

23. 두 자리 자연수인 상수 m, n 에 대하여 이차방정식 $x^2 + mx + 9n = 0$ 이 중근을 가질 때, m 의 값을 최대로 하는 n 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 81

해설

$$D = m^2 - 4 \times 9n = 0$$

$$m^2 = 36n$$

$$\therefore m = 6\sqrt{n} \quad (\because m, n \text{ 은 자연수이다.})$$

따라서 m 이 최대가 되는 두 자리의 자연수 $n = 81$ 이다.

$$\therefore m = 54 \text{ 의 최댓값을 가질 때, } n = 81 \text{ 이다.}$$

24. 서로 다른 두 실수 p, q 가 $p^2 + ap + b = 0, q^2 + aq + b = 0$ 을 만족할 때, 이차방정식 $x^2 - (2c - a)x - ac + b = 0$ 의 근의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

서로 다른 두 실수 p, q 가 $p^2 + ap + b = 0, q^2 + aq + b = 0$ 을 만족하므로

$x^2 + ax + b = 0$ 은 서로 다른 두 근을 가진다.

따라서 $D = a^2 - 4b > 0 \dots \textcircled{1}$

$x^2 - (2c - a)x - ac + b = 0$ 에서

$$D = (a - 2c)^2 - b(b - ac) = a^2 + 4c^2 - 4b$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에서 $a^2 - 4b > 0$ 이고 $4c^2 \geq 0$ 이므로

$$a^2 + 4c^2 - 4b > 0$$

따라서 $x^2 - (2c - a)x - ac + b = 0$ 에서 $D > 0$ 이므로 서로 다른 두 근을 가진다.

25. 이차방정식 $ax^2 - \left(\frac{a}{b} + 3\right)x + \frac{a}{b} + 1 = 0$ 의 두 근의 합이 2, 곱이 -2 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{5}{16}$

해설

x^2 의 계수가 a 이고 두 근의 합이 2, 곱이 -2 인 이차방정식은 $a(x^2 - 2x - 2) = 0$ 이고 주어진 식의 계수와 비교하면

$$-\left(\frac{a}{b} + 3\right) = -2a \cdots \text{㉠}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = -2a \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하면

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$