1. 이차방정식 $3x^2 - 3x - 2 = 0$ 의 근을 구하면?

① $x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{3}$ ② $x = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{3}$ ③ $x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{6}$
④ $x = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{6}$ ⑤ $x = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$

해설

$3x^2 - 3x - 2 = 0$ 에서 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 를 이용하면 $a = 3,\ b = -3,\ c = -2$ 이므로

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 3 \times (-2)}}{2 \times 3} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{6}$ 이다.

2. 다음 이차방정식 중 해가 <u>없는</u> 것은?

① $x^2 - 6x - 2 = 0$
② $x^2 - 3x - 4 = 0$
③ $2x^2 - 2x + 2 = 0$
④ $2x^2 - 4x + 2 = 0$
⑤ $x^2 - x - 12 = 0$

해설

③ $D = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 2 < 0$: 해가 없다.

3. 다음 이차방정식이 해를 1 개 가질 때 k 의 값은?

$$x^2 - 8x + 9 - k = 0$$

① -7 ② -2 ③ 7 ④ 17 ⑤ 25

해설

중근을 가질 때 판별식 $D = 0$

$D = (-8)^2 - 4(9 - k) = 0$

$\therefore\ k = -7$

4. 이차방정식 $3x^2 + px + q = 0$ 의 두 근이 $x = -\frac{2}{3}$ 또는 $x = 3$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하면?

① -13 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 13

해설

근과 계수와의 관계에서

두 근의 합 $-\frac{p}{3} = \frac{7}{3}$, $p = -7$

두 근의 곱 $\frac{q}{3} = -2$, $q = -6$

$\therefore p + q = -13$

5. 이차방정식 $2x^2+8x+3=0$ 의 두 근을 k, m 이라 할 때, $2(k^2+km+m^2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 29

해설

$k+m=-4,\ km=\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}2(k^2+km+m^2) &= 2\left\{(k+m)^2-km\right\}\\ &=2\left\{(-4)^2-\frac{3}{2}\right\}\\ &=29\end{aligned}$$

6. 차가 5이고 곱이 104인 두 자연수 A, B가 있을 때, $A^2 - B^2$의 값은? (단, $A > B$)

① 95 ② 100 ③ 105 ④ 110 ⑤ 115

해설

두 자연수를 x, $x-5$라 하면

$x(x-5) = 104$

$x^2 - 5x - 104 = 0$

$x = 13(\because x > 5)$

따라서 두 수는 $A = 13$, $B = 8$이다.

따라서 두 수의 제곱의 차는 $169 - 64 = 105$이다.

7. 동화책을 펼쳤더니 펼쳐진 두 쪽수의 곱이 156 이었을 때, 앞 쪽의 쪽수는?

① 10 쪽 ② 12 쪽 ③ 14 쪽 ④ 16 쪽 ⑤ 18 쪽

해설

두 쪽수를 x, $x+1$ 이라 하면

$x(x+1)=156$

$x^2+x-156=0$

$(x+13)(x-12)=0$

$x>0$ 이므로 $x=12$ (쪽)

8. 반지름이 r인 원이 있다. 이 원의 반지름을 2만큼 줄였더니 넓이가 9π가 되었다. 처음 원의 넓이는?

① 15π ② 20π ③ 25π ④ 30π ⑤ 35π

해설

$\pi(r-2)^2 = 9\pi$
$r^2 - 4r - 5 = 0$
$(r+1)(r-5) = 0$
$r = 5$ $(\because r > 0)$
(처음 원의 넓이)$= \pi r^2 = 25\pi$

9. 다음은 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0\ (a\neq 0)$을 푸는 과정이다. ① ~ ⑤에 들어갈 식이 바르지 못한 것은? (단, $b^2-ac\geq 0$)

$ax^2+2bx+c=0\,(a\neq 0)$

$x^2+\frac{2b}{a}x=-\frac{c}{a}$

$x^2+\frac{2b}{a}x+①=-\frac{c}{a}+①$

$(x+②)^2=③$

$x=④\pm⑤$

① $\frac{b^2}{a^2}$ ② $\frac{b}{a}$ ③ $\frac{b^2-ac}{a^2}$
④ $-\frac{b}{a}$ ⑤ $\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a^2}$

해설

$ax^2+2bx+c=0\,(a\neq 0)$
양변을 a 로 나누고 상수항을 이항하면
$x^2+\frac{2b}{a}x=-\frac{c}{a}$,
양변에 $\frac{b^2}{a^2}$ 을 더하면
$x^2+\frac{2b}{a}x+\frac{b^2}{a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{a^2}$
$\left(x+\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b^2-ac}{a^2}$
$x+\frac{b}{a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}$
$x=-\frac{b}{a}\pm\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}$
∴ ⑤가 잘못 되었다.

10. 이차방정식 $x^2 + 4x - 1 = 0$ 의 두 근 중에서 양수를 a 라 할 때, $n < a < n + 1$ 을 만족하는 정수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2 + 4x - 1 = 0$ 의 두 근은 $x = -2 \pm \sqrt{5}$
a 는 양수이므로 $a = -2 + \sqrt{5}$
$0 < -2 + \sqrt{5} < 1$
$\therefore n = 0$

11. 두 양수 a, b가 $(a+b)^2-2(a+b)-15=0$, $a-b=1$을 만족할 때, ab의 값은?

① -4　② -6　③ 4　④ 6　⑤ 5

해설

$a+b=t$로 치환하면 $(t+3)(t-5)=0$

$t=-3$ 또는 5

i) $\begin{cases} a+b=-3 \\ a-b=1 \end{cases}$ 또는

ii) $\begin{cases} a+b=5 \\ a-b=1 \end{cases}$

i) 에서 $a=-1$, $b=-2$이므로 a, b가 양수라는 조건에 맞지 않다.

ii) 에서 $a=3$, $b=2$

$\therefore ab=6$

12. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + 10x + 15 + m = 0$ 이 중근을 갖도록 m 의 값은?

① 5　② −5　③ 10　④ −10　⑤ 15

해설

$\frac{D}{4} = 25 - (15 + m) = 0$

$\therefore m = 10$

13. 어떤 자연수를 제곱해야 할 것을 잘못하여 5배 하였더니 제곱한 것보다 14가 작아졌다고 한다. 이 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

어떤 자연수를 x라고 하면

$5x = x^2 - 14$

$x^2 - 5x - 14 = 0$

$(x-7)(x+2) = 0$

x는 자연수이므로 $x = 7$ 이다.

14. 이차방정식 $(x+1)(2x-5)=0$ 을 $ax^2+bx+c=0$ 의 꼴로 고칠 때, $a,\ b,\ c$ 의 값은?

① $a=-2,\ b=-3,\ c=-5$
② $a=2,\ b=-3,\ c=-5$
③ $a=-2,\ b=3,\ c=5$
④ $a=2,\ b=3,\ c=5$
⑤ $a=-2,\ b=3,\ c=-5$

해설

$(x+1)(2x-5)=0$
$2x^2-3x-5=0$
$\therefore\ a=2,\ b=-3,\ c=-5$

15. 이차방정식 $x^2 - 7x + 10 = 0$ 의 두 근의 합을 a, 두 근의 곱을 b 라고 할 때, $x^2 - bx + a = 0$ 의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 5 + 3\sqrt{2}$

▷ 정답 : $x = 5 - 3\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 7x + 10 = 0$
$(x-2)(x-5) = 0$
$\therefore\ x = 2$ 또는 $x = 5$
$a = 7,\ b = 10$
$x^2 - 10x + 7 = 0$
$x^2 - 10x + 25 = 18$
$(x-5)^2 = 18$
$\therefore\ x = 5 \pm 3\sqrt{2}$

16. 지상에서 20m 의 높이에 있는 건물의 옥상에서 초속 30m 로 똑바로 위로 던진 공의 x 초 후의 높이를 h m 라 하면 $h = -5x^2 + 30x + 20$ 인 관계가 성립한다. 공이 다시 건물의 옥상으로 떨어질 때까지 걸리는 시간은?

① 2 초 ② 4 초 ③ 6 초 ④ 8 초 ⑤ 10 초

해설

$h = -5x^2 + 30x + 20$ 에서 공이 옥상에 떨어지는 것은 높이 h 가 20 이 될 때이다.

$20 = -5x^2 + 30x + 20 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0$

$x(x-6) = 0$

$x = 0$ 또는 $x = 6$

$x > 0$ 이므로 $x = 6$

17. 면으로부터 50m 되는 높이에서 던져올린 물체의 t 초 후의 높이를 h 라고 할 때, t 와 h 사이에는 $h = -5t^2 + 15t + 50$ 인 관계가 성립한다. 이 물체는 몇 초 후에 땅에 떨어지는가?

① 2 초 ② 3 초 ③ 4 초 ④ 5 초 ⑤ 7 초

해설

$-5t^2 + 15t + 50 = 0 \rightarrow t^2 - 3t - 10 = 0$
$\rightarrow (t-5)(t+2) = 0 \rightarrow t = -2,\ 5$ 이므로
따라서 $t = 5(t > 0)$ 이다.

18. 다음 이차방정식의 근을 구하면?

$$0.5(x-2)(x+1)=\frac{1}{3}(x-2)^2$$

① 1, −7　② −7, 2　③ −4, 9　④ 3, −5　⑤ 14, 1

해설

양변에 6을 곱하면

$3(x-2)(x+1)=2(x-2)^2$

$3x^2-3x-6=2x^2-8x+8$

$x^2+5x-14=0$

$(x+7)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-7$ 또는 $x=2$

19. $2x^2 - 8x - k = 0$ 이 중근을 가질 때, $3x^2 - (1-k)x + 3 = 0$ 의 근을 구하면?

① $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$
④ $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{3}$

해설

$2x^2 - 8x - k = 0$ 이 중근을 가지려면
$D = (-8)^2 + 4 \times 2 \times k = 0,\ k = -8$
$3x^2 - (1-k)x + 3 = 0$ 에 $k = -8$을 대입하면
$3x^2 - 9x + 3 = 0$
$\therefore\ x = \frac{9 \pm \sqrt{81-36}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

20. 이차방정식의 한 근이 $\frac{4}{3-\sqrt{5}}$ 인 이차방정식 A는 다음과 같다. 이때, 유리수 a , b 에서 $\frac{b}{a}$ 의 값을 구하여라.

$ax^2 - x + b = 0$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

한 근이 $\frac{4}{3-\sqrt{5}} = 3 + \sqrt{5}$ 이므로 다른 한 근은 $3 - \sqrt{5}$

두 근의 합은 $\frac{1}{a} = 6$, $a = \frac{1}{6}$

두 근의 곱은 $\frac{b}{a} = 4$, $b = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{b}{a} = 4$

21. 선물 가게에 원가가 1000원인 물건이 있다. 원가의 $a\%$ 의 이익을 붙여서 정가를 정하였다가 할인 기간에 정가의 $2a\%$ 를 할인하여 팔았더니 120원의 손해를 보았다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

원가 : 1000원

정가 : $1000 \times \left(1 + \frac{a}{100}\right)$ 원

$1000 \times \left(1 + \frac{a}{100}\right) \times \left(1 - \frac{2a}{100}\right) + 120 = 1000$

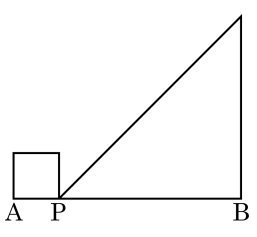
$-10a - \frac{1}{5}a^2 + 1000 + 120 = 1000$

$a^2 + 50a - 600 = 0$

$(a + 60)(a - 10) = 0$

$a > 0$ 이므로 $a = 10$

22. 길이가 10 cm 인 선분 AB 위에 점 P 를 잡아서 다음 그림과 같이 정사각형과 직각이등변삼각형을 만들어 넓이의 합이 36 cm^2 가 되게 하려고 한다. 선분 AP 의 길이를 구하여라. (단, 선분 AP 의 길이는 자연수이다.)



▶ 답 : _____ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

선분 AP 의 길이를 x cm 라고 하면

(정사각형의 넓이) $= x^2$

(직각이등변삼각형의 넓이) $= \frac{1}{2}(10-x)^2$

$x^2 + \frac{1}{2}(10-x)^2 = 36$

$\frac{3}{2}x^2 - 10x + 50 - 36 = 0$

$3x^2 - 20x + 28 = 0$

$(3x-14)(x-2) = 0$

선분 AP 의 길이는 자연수이므로 $x = 2(\text{cm})$

23. 이차방정식 $p^2x^2-3x-q=0$ 이 서로 다른 두 자연수 α, β 를 근으로 가질 때, $\alpha^2+\beta^2+p^2+q^2$ 의 값을 구하여라. (단, p, q는 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$p^2x^2-3x-q=0$ 은 서로 다른 두 자연수 α, β $(\alpha \neq \beta)$ 를 근으로 가지므로

$\alpha+\beta=\dfrac{3}{p^2}$, $\alpha\beta=-\dfrac{q}{p^2}$

이때, α, β 가 자연수이므로 $\alpha+\beta=\dfrac{3}{p^2}$ 도 자연수이다.

$\therefore\ p^2=1$ 또는 $p^2=3$

$\therefore\ \alpha+\beta=3$ 또는 $\alpha+\beta=1$

여기서 α, β 는 서로 다른 자연수이므로 $\alpha+\beta=1$ 이 될 수 없다.

따라서 $p^2=1$ 이고 $\alpha+\beta=3$ 이다.

$\alpha+\beta=3$ 에서 $\alpha=1$, $\beta=2$ 또는 $\alpha=2$, $\beta=1$

$\alpha\beta=-\dfrac{q}{p^2}$ 이므로 $q=-2$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+p^2+q^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+p^2+q^2=4+1+1+4=10$

24. 이차방정식 $4x^2 - 15x + m = 0$ 의 두 근의 절댓값의 비가 $2:3$ 일 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{27}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 두 근을 a, b 라 하면 $|a| : |b| = 2 : 3$ 이다.

따라서 한 근이 $|a|$ 일 때 다른 한 근은 $\frac{3}{2}|a|$ 이다.

(두 근의 합) $= |a| + \frac{3}{2}|a| = \frac{15}{4}$, $\frac{5}{2}|a| = \frac{15}{4}$

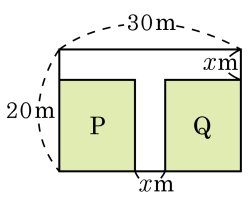
$\therefore\ |a| = \frac{3}{2}$, $a = \pm\frac{3}{2}$

$\therefore\ |b| = \frac{9}{4}$, $b = \pm\frac{9}{4}$

(두 근의 곱) $= \frac{m}{4} = \frac{27}{8}$

$\therefore\ m = \frac{27}{2}$

25. 가로와 세로의 길이가 30m, 20m 인 직사각형 모양의 화단이 있다. 다음 그림과 같이 폭이 xm 인 길을 내어 P, Q 두 개의 화단으로 만들었더니 P, Q 화단의 넓이가 각각 150m^2, 225m^2 가 되었다. 이때, 길의 폭은?



▶ 답 : _____ m

▷ 정답 : 5 m

해설

(P, Q 화단의 넓이의 합) $= (30-x)(20-x)$
$= 600 - 50x + x^2$
$= 375$

$x^2 - 50x + 225 = 0$
$\therefore\ (x-5)(x-45) = 0$
그런데 $0 < x < 20$ 이므로 $x = 5$ 이다.