

1. $x^3 + ax^2 + bx - 4$ 는 $x - 2$ 로 나누어 떨어지고 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 6이다. $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$ 라 하면

$$f(2) = 4a + 2b + 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(-1) = a - b - 5 = 6 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a = 3, b = -8$

$$\therefore a - b = 11$$

2. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$

② $(x-1)(x+2)(x+3)$

③ $(x-1)(x-2)(x-3)$

④ $(x+1)(x+2)(x-3)$

⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면

$f(1) = 0, f(2) = 0, f(3) = 0$ 이므로

(준식) $= (x-1)(x-2)(x-3)$

3. 방정식 $|x| + |x - 1| = 2$ 의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

i) $x < 0$ 일 때,
 $-x - (x - 1) = 2$ 이므로 $-2x + 1 = 2$
 $\therefore x = -\frac{1}{2}$
ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,
 $x - (x - 1) = 2$ 이므로 $0 \cdot x = 1$
 $\therefore$ 해가 없다.
iii) $1 \leq x$ 일 때,
 $x + x - 1 = 2$ 이므로 $2x = 3$
 $\therefore x = \frac{3}{2}$
(i), (ii), (iii) 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}$

4. x 에 대한 이차방정식 $(m+3)x^2 - 4mx + 2m - 1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 m 의 값의 합은?

- ① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 중근을 가질 조건은

$D = 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = (-2m)^2 - (m+3)(2m-1) = 0$$

$$4m^2 - (2m^2 + 5m - 3) = 0$$

$$2m^2 - 5m + 3 = 0$$

$$(m-1)(2m-3) = 0$$

$$\therefore m = 1 \text{ 또는 } \frac{3}{2}$$

$$\therefore 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

5. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x + \frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 없는 것은? (단, $x \neq 0$)

- ① -5 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x + \frac{1}{x} = t$ 라 하고,

양변에 x 를 곱하면

$$x^2 + 1 = tx$$

$x^2 - tx + 1 = 0$ 에서 x 는 실수이므로

$$D = t^2 - 4 \geq 0 \quad \therefore t^2 \geq 4, t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 2$$

6. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + y)(y + z)(z + x)$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \text{ 을 변형하면} \\(\text{준식}) &= (1 - z)(1 - x)(1 - y) \\&= 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz \\&= 1 - 1 + 2 - 3 = -1\end{aligned}$$

7. $x^4 + 2x^2 + 9 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ 로 인수분해될 때, $|ab - cd|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2 + 3)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)\end{aligned}$$

여기서 계수를 비교하면

$$a = 2, b = 3, c = -2, d = 3$$

$$\therefore |ab - cd| = |2 \times 3 - (-2) \times 3| = 12$$

8. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y 를 구할 때, x^2+y^2 의 값을 구하시오.

$$(1-2xi)(2-yi)=6-2i \text{ (단, } x>0 \text{)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned}(2-2xy)-(4x+y)i&=6-2i \\ 2-2xy&=6, \ 4x+y=2 \\ \text{연립하여 } x \text{에 대해 정리하면} \\ 2x^2-x-1&=0 \\ (x-1)(2x+1)&=0 \\ \therefore x&=1(x>0), \ y=-2\end{aligned}$$

9. 복소수 $x = a + bi$ (a, b 는 실수)가 $x^2 = 3 + 4i$, $x^3 = 2 + 11i$ 를 만족할 때 $a + b$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}x^3 &= x^2 \times x \\&= (3 + 4i)(a + bi) \\&= (3a - 4b) + (4a + 3b)i \\(3a - 4b) + (4a + 3b)i &= 2 + 11i \\3a - 4b &= 2, 4a + 3b = 11 \\ \therefore a = 2, b = 1 &\text{ 이므로 } a + b = 3\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}x &= \frac{x^3}{x^2} = a + bi \\ \frac{2 + 11i}{3 + 4i} &= \frac{(2 + 11i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} \\&= \frac{50 + 25i}{25} \\&= 2 + i \\ \therefore a = 2, b = 1\end{aligned}$$

10. 두 복소수 $\alpha = a - 2i$, $\beta = 5 + bi$ 에 대하여 $\alpha + \bar{\beta} = 3 - 2i$ 를 만족하는 실수 a, b 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -6$

해설

$$\alpha + \bar{\beta} = 3 - 2i$$

$$(a - 2i) + (5 - bi) = 3 + 2i$$

$$(a + 5) - (2 + b)i = 3 + 2i$$

$$\therefore a = -2, b = -4$$

$$\therefore a + b = -6$$

11. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 2일 때, 방정식 $f(2x-3) = 0$ 의 두 근의 합은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = 2$

$f(2x-3) = 0$ 에서

$2x-3 = \alpha, 2x-3 = \beta$

$\therefore x = \frac{\alpha+3}{2}, \frac{\beta+3}{2}$

$\therefore$ (두 근의 합) $= \frac{(\alpha+\beta)+6}{2} = 4$

12. 직선 $y = 2x + k$ 가 이차함수 $y = -x^2 - 6x + 1$ 의 그래프와는 만나고, 이차함수 $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프와는 만나지 않을 때, 정수 k 의 개수는?

- ① 10 개 ② 12 개 ③ 14 개 ④ 16 개 ⑤ 18 개

해설

직선 $y = 2x + k$ 가
곡선 $y = -x^2 - 6x + 1$ 과 만날 때
 $2x + k = -x^2 - 6x + 1$ 에서
 $x^2 + 8x + k - 1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면
 $\frac{D_1}{4} = 16 - k + 1 \geq 0$ 에서 $k \leq 17$
직선 $y = 2x + k$ 가
곡선 $y = -x^2 + 4x$ 와 만나지 않을 때
 $2x + k = -x^2 + 4x$ 에서
 $x^2 - 2x + k = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면
 $\frac{D_2}{4} = 1 - k < 0$ 에서 $k > 1$
따라서 k 의 값의 범위는 $1 < k \leq 17$ 이므로
정수 k 의 개수는 16 개이다.

13. 이차방정식 $x^2 - (p+1)x + \frac{1}{4}q - 1 = 0$ 의 두 근의 차가 1 이 되는 q 의 최솟값은 ?

- ① $\sqrt{2}$ ② 3 ③ $3\sqrt{2}$ ④ 5 ⑤ $3\sqrt{3}$

해설

주어진 방정식의 두 근을 α, β 라고 하면,

$$\alpha + \beta = p + 1, \alpha\beta = \frac{1}{4}q - 1$$

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta| &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{(p + 1)^2 - 4\left(\frac{1}{4}q - 1\right)} = 1 \end{aligned}$$

제곱하여 정리하면 $q = (p + 1)^2 + 3$

따라서 q 의 최솟값은 3

14. $(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때,
 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2^{24} ④ 2^{25} ⑤ 2^{50}

해설

$$(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$$

$x = 1$ 을 양변에 대입하면

$$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots \textcircled{1}$$

$x = -1$ 을 양변에 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$$

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50} = 0$$

15. $x^4 + 3x^2 + 4$ 를 바르게 인수분해한 것은?

① $(x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 1)$ ② $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - x + 2)$

③ $(x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2)$ ④ $(x^2 + x - 1)(x^2 - 2x + 1)$

⑤ $(x^2 + x - 2)(x^2 + x + 2)$

해설

$$\begin{aligned}x^4 + 3x^2 + 4 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2 \\&= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\&= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)\end{aligned}$$

16. 자연수 n 에 대하여 $1 + \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$ 의 값을 모두 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $1-i$

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{1}{i} = -i, \left(\frac{1}{i}\right)^3 = i$$

i) $n = 2k$ 일 때,

$$1 + \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$$

$$= 1 - i + i - i + \cdots + i = 1$$

ii) $n = 2k-1$ 일 때

$$1 + \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$$

$$= 1 - i + i - i + \cdots - i$$

$$= 1 - i$$

17. 두 실수 a, b 에 대하여 복소수 $z = a + bi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$ 의 곱 $z\bar{z} = 5$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right)$ 를 간단히 하면?

- ① b ② $2b$ ③ 0 ④ $5a$ ⑤ a

해설

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= 5, \quad \bar{z} = \frac{5}{z} \\ \therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a \end{aligned}$$

18. $2x^2 + y^2 = 8$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $4x + y^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$2x^2 + y^2 = 8$ 에서

$y^2 = 8 - 2x^2$ 으로 놓으면

$y^2 = 8 - 2x^2 \geq 0, x^2 - 4 \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 2$

이 때, $y^2 = 8 - 2x^2$ 을 $4x + y^2$ 에 대입하면

$4x + y^2 = 4x + (8 - 2x^2) = -2(x - 1)^2 + 10$

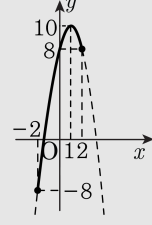
여기서 $f(x) = 4x + y^2 = -2(x - 1)^2 + 10$

이라고 하면 $-2 \leq x \leq 2$ 이므로

다음 그림에서 $x = 1$ 일 때

$f(x)$ 의 최댓값은 10

$x = -2$ 일 때 $f(x)$ 의 최솟값은 $-2(-2 - 1)^2 + 10 = -8$



따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + (-8) = 2$

19. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 4kx + 5k^2 - 1 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때, α 의 최댓값과 β 의 최솟값의 합을 구하여라. (단, $\alpha \geq \beta$ 이고, k 는 실수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 등식 $x^2 + 4kx + 5k^2 - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{A}$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$5k^2 + 4xk + (x^2 - 1) = 0 \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B}$ 은 k 에 대한 이차방정식이고 k 가 실수이므로 실근을 갖는다. 따라서, 판별식 D 에 대하여

$$\frac{D}{4} = (2x)^2 - 5(x^2 - 1) \geq 0$$

$$-x^2 + 5 \geq 0, \quad x^2 - 5 \leq 0$$

$$\therefore -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \cdots \cdots \textcircled{C}$$

그런데 α, β 는 $\textcircled{A}$ 의 실근이므로 $\textcircled{C}$ 의 범위 안에 있어야 한다.

$$\therefore -\sqrt{5} \leq \beta \leq \alpha \leq \sqrt{5}$$

α 의 최댓값은 $\sqrt{5}$, β 의 최솟값은 $-\sqrt{5}$

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 0

20. x 의 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x^2) = x^3 f(x+1) - 2x^4 + 2x^2$ 이 성립할 때, $f(x)$ 를 구하면? (단, $f(0) = f(1) = f(2) = 0$)

- ① $f(x) = x(x-1)(x-2)$ ② $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$
③ $f(x) = x(x-1)^2(x-2)$ ④ $f(x) = x(x-1)(x-2)^2$
⑤ $f(x) = x^2(x-1)^2(x-2)$

해설

- (i) $f(x)$ 를 n 차의 식이라하면
좌변 : $2n$ 차 = 우변 : $n+3$ 차
 $\therefore n = 3$
(ii) $f(x) = kx(x-1)(x-2)$ (단, $k \neq 0$)
($\because f(0) = f(1) = f(2) = 0$)
좌변 = $kx^6 - 3kx^4 + 2kx^2$
우변 = $kx^6 - (k+2)x^4 + 2x^2$
 $\therefore kx^6 - 3kx^4 + 2kx^2 = kx^6 - (k+2)x^4 + 2x^2$
 $-3k = -(k+2)$
 $k = 2$ 에서 $k = 1$
 $\therefore f(x) = x(x-1)(x-2)$

21. 다음은 다항식 $x^{2n} + 1 + (x+1)^{2n}$ 이 $x^2 + x + 1$ 로 나누어떨어지지 않게 하는 자연수 n 을 구하는 과정이다. ()에 알맞은 수를 차례대로 나열한 것은?

ω 가 다항식 $x^2 + x + 1 = 0$ 을 만족하는 근이라고 하면 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$
 $\therefore \omega^3, \omega \neq 1$
(i) $n = 3k(k = 0, 1, 2, \dots)$ 이면
 $\omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} = (\ominus) \neq 0$
(ii) $n = 3k + 1(k = 0, 1, 2, \dots)$ 이면
 $\omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} = (\omin�)$
(iii) $n = 3k + 2(k = 0, 1, 2, \dots)$ 이면
 $\omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} = 0$
따라서 (i), (ii), (iii) 에서 구하는 n 은 ($\omin�$)이다.

- ① 1, 0, 3k ② 2, 1, 3k + 1 ③ 3, 0, 3k + 2
- ④ 3, 0, 3k ⑤ 2, 1, 3k

해설

(i) $n = 3k$ 이면
 $\omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n}$
 $= \omega^{6k} + 1 + (\omega + 1)^{6k}$
 $= \omega^{6k} + 1 + (-\omega^2)^{6k}$
 $= (\omega^3)^{2k} + 1 + (\omega^3)^{4k}$
 $= 1 + 1 + 1(\because \omega^3 = 1) = (3) \neq 0$
(ii) $n = 3k + 1$ 이면
 $\omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n}$
 $= \omega^{6k} + 2 + 1 + (\omega + 1)^{6k} + 2$
 $= \omega^{6k} \cdot \omega^2 + 1 + (-\omega^2)^{6k} + 2$
 $= \omega^2 + 1 + (-\omega^2)^{6k}(-\omega^2)^2$
 $= \omega^2 + 1 + \omega = (0)$
(iii) $n = 3k + 2$ 이면
 $\omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} = 0$
따라서 (i), (ii), (iii) 에서 구하는 n 은 $(3k)$ 이다.

22. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면 $Q(x)$ 의 계수의 총합(상수항 포함)과 R 과의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{29} + 1)$

② $\frac{1}{2} \cdot 3^{30}$

③ $\frac{1}{2}(3^{30} - 1)$

④ $\frac{1}{2}(3^{30} + 1)$

⑤ $\frac{1}{2}(3^{29} - 1)$

해설

$$x^{30} = (x-3)Q(x) + R$$

$$x=3 \text{을 대입하면 } 3^{30} = R$$

$Q(x)$ 의 계수의 총합은 $Q(1)$ 과 같으므로

$$x=1 \text{을 대입하면 } 1 = -2Q(1) + 3^{30}$$

$$\therefore Q(1) = \frac{3^{30} - 1}{2}$$

$$\therefore R - Q(1) = 3^{30} - \frac{3^{30} - 1}{2} = \frac{3^{30} + 1}{2} = \frac{1}{2}(3^{30} + 1)$$

23. 서로 다른 두 복소수 x, y 가 $x^2 - y = i$, $y^2 - x = i$ 를 만족할 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $2 - 3i$

해설

$x^2 - y = i \cdots \textcircled{1}$, $y^2 - x = i \cdots \textcircled{2}$ 에서
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 하면 : $(x + y)(x - y) + (x - y) = 0$,
 $(x - y)(x + y + 1) = 0$
조건에서 $x \neq y$ 이므로 $x + y = -1$ 이다.
 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 하면 $x^2 + y^2 - x - y = 2i$
식을 변형하면 $(x + y)^2 - 2xy - (x + y) = 2i$
 $\therefore xy = 1 - i$
 $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$
 $= (-1)^3 - 3(1 - i)(-1)$
 $= 2 - 3i$

24. x 에 대한 이차방정식 $(x-p)(x-q)+a(x-q)+b(x-p)=0$ 의 두 근을 α, β 라 한다. $ab \neq 0, p \neq q$ 일 때, $\frac{a(q-\alpha)(q-\beta)}{b(p-\alpha)(p-\beta)}$ 의 값을 구하면?

- ① -5
- ② -4
- ③ -3
- ④ -2
- ⑤ -1

해설

$(x-p)(x-q)+a(x-q)+b(x-p)=(x-\alpha)(x-\beta)$

양변에 x 대신에 p, q 를 각각 대입하면

$a(p-q)=(p-\alpha)(p-\beta)$

$b(q-p)=(q-\alpha)(q-\beta)$ 이므로

$\frac{a(q-\alpha)(q-\beta)}{b(p-\alpha)(p-\beta)}=\frac{a \cdot b(q-p)}{b \cdot a(p-q)}=-1$

- 25.** x 에 대한 이차방정식 $x^2 - (p+1)x + p+5 = 0$ 의 두근 α, β 가 모두 양의 정수일 때, $\alpha > \beta$ 를 만족하는 순서쌍 (α, β) 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 1 개

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = p + 1, \alpha\beta = p + 5$$

$$\therefore \alpha + \beta - 1 = \alpha\beta - 5$$

$$\therefore (\alpha - 1)(\beta - 1) = 5$$

α, β 모두 양의 정수이고, $\alpha > \beta$ 이므로

$$\alpha - 1 = 5, \quad \beta - 1 = 1$$

$$\alpha = 6, \quad \beta = 2$$

$\therefore (6, 2) \text{ 1 개}$