1. $2a+3b=12$를 만족하는 양수 $a,\ b$에 대하여 ab의 최댓값을 구하면?

① 12 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 4

2. 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c=9$일 때 abc의 최댓값은?

① 19　② 21　③ 23　④ 25　⑤ 27

3. $x \geq 0$, $y \geq 0$이고 $x+3y=8$일 때, $\sqrt{x}+\sqrt{3y}$의 최댓값은?

① 2 ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

4. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 틀린 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$이다.
② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.
③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.
④ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$이다.
⑤ $a + \frac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

5. 양수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=1$을 만족할 때, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$의 최솟값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

6. 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$을 만족하는 양의 정수 x, y에 대하여 xy의 최솟값은?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

7. $x+y=3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy>0$)

답: ________

8. x가 양의 실수 일 때, $x^2+1+\frac{1}{x^2}$의 최솟값과 그 때의 x값을 차례대로 구하여라.

답: ________

답: ________

9. $x>3$일 때 $\frac{3}{x-3}+2+3x$의 최솟값은?

① 3　　② 5　　③ 12　　④ 15　　⑤ 17

10. 양수 x에 대하여 $8x^2 + \frac{2}{x}$의 최솟값은?

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt[3]{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

11. 양수 x에 대하여 $\dfrac{x^2+2x+2}{x}$는 $x = a$에서 최솟값 b를 가질 때, $-2a+b+1$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

12. 실수 x, y에 대하여 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$이 성립할 때, $x+y$의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$ ② 3 ③ $\sqrt{13}$ ④ 5 ⑤ 12

13. a, b, x y가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$일 때 $ax + by$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16　② -4　③ 0　④ 4　⑤ 16

14. 실수 a, b, x, y에 대하여 $a^2+b^2=5$, $x^2+y^2=3$일 때 다음 중 $ax+by$의 값이 될 수 없는 것은?

① -1 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

15. 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x^2+y^2+z^2=6$일 때 $x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z$의 최댓값 M과 최솟값 m은?

① $M=3,\ m=0$　　② $M=3, m=-3$

③ $M=6, m=0$　　④ $M=6, m=-6$

⑤ $M=6, m=-12$

16. 실수 x, y, z에 대하여 $x-y+4z=3\sqrt{2}$일 때 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은?

① $\frac{1}{3}$　　② $\frac{1}{2}$　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

17. $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이고, $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값을 구하여라.

답: ________

18. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단, $a \neq b$)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$　　② $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

③ $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$　　④ $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

⑤ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

19. 다음은 $a \ge 0, b \ge 0$인 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

[㈎] - [㈏]
$= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$
$= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}$
$= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ [㈐]
따라서, [㈎] $\ge$ [㈏]
한편, 등호는 [㈑] 일 때 성립한다.

위의 증명에서 ㈎, ㈏, ㈐, ㈑에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① ㈎ $a+b$ ㈏ $\sqrt{ab}$ ㈐ ≥ 0 ㈑ $a=0, b=0$
② ㈎ $\frac{a+b}{2}$ ㈏ $2\sqrt{ab}$ ㈐ ≤ 0 ㈑ $a=0, b=0$
③ ㈎ $\frac{a+b}{2}$ ㈏ $\sqrt{ab}$ ㈐ ≥ 0 ㈑ $a=b$
④ ㈎ $\sqrt{ab}$ ㈏ $a+b$ ㈐ ≥ 0 ㈑ $a=b$
⑤ ㈎ $2\sqrt{ab}$ ㈏ $\frac{a+b}{2}$ ㈐ ≤ 0 ㈑ $a=0, b=0$

20. $(1+a)(1+b)(1+c)=8$인 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $abc \le 1$임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이때, $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 산술평균 , 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\ \sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3$ ([가])
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$\therefore S \ge 1+3\ \sqrt[3]{abc}+3(\sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $^3\sqrt{abc}+1 \le 2,\quad abc \le 1$
(단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다] 에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

① $abc,\ a=b=c=1$
② $\sqrt[3]{abc},\ a=2$이고 $b=c$
③ $(\sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=1$
④ $abc,\ a=b$이고$c=2$
⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=2$

21. 다음은 $a > 0,\ b > 0$일 때 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$임을 증명한 것이다. (　　　　) 안에 알맞은 것은?

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\qquad)^2}{2} \geq 0$$

① $\sqrt{a} + \sqrt{b}$　② $\sqrt{a} - \sqrt{b}$　③ $a+b$

④ $a-b$　⑤ ab

22. $a > 0$, $b > 0$일 때, 다음 식의 최솟값을 구하여라.

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$$

답: ________

23. 한 자리의 자연수 $l,\ m,\ n$에 대하여 $\{l,\ m,\ n\} = \{p,\ q,\ r\}$가 성립한다고 한다. 이 때, $\dfrac{l}{p} + \dfrac{m}{q} + \dfrac{n}{r}$의 최소값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

24. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$일 때, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답: ________

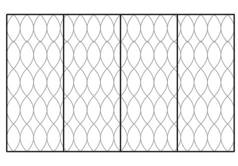
25. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$일 때, $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c}$의 최소값을 구하여라.

답: ________

26. 길이가 16 m 인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① $8\,\mathrm{m}^2$ ② $16\,\mathrm{m}^2$ ③ $25\,\mathrm{m}^2$ ④ $36\,\mathrm{m}^2$ ⑤ $64\,\mathrm{m}^2$

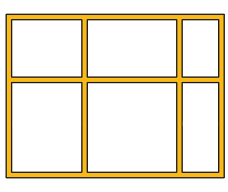
27. 어떤 농부가 길이 $60\,\mathrm{m}$의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① $60\mathrm{m}^2$ ② $70\mathrm{m}^2$ ③ $80\mathrm{m}^2$

④ $90\mathrm{m}^2$ ⑤ $100\mathrm{m}^2$

28. 길이가 240 인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6 개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로의 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



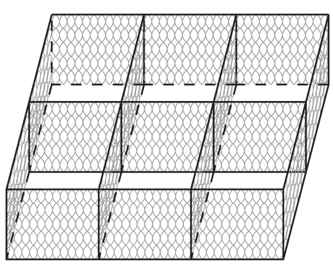
① $(600, 40)$　② $(1200, 40)$　③ $(600, 30)$　④ $(1200, 30)$　⑤ $(450, 60)$

29. 길이가 10인 쇠파이프를 n등분(같은 크기)으로 잘라 다른 장소로 운반하려고 한다. 길이가 x인 쇠파이프 1개를 운반하는 데 드는 비용이 $250x^2$원이고 쇠파이프를 한 번 자를 때 드는 비용이 1000원이라 할 때, 이 쇠파이프를 잘라서 운반하는 데 드는 최소비용은?

① 6000원 ② 7000원 ③ 8000원

④ 9000원 ⑤ 10000원

30. 동원이가 길이 $152\,\mathrm{m}$ 인 철망을 가지고 다음 그림과 같이 여섯 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이가 최대가 될 때, 전체 직사각형의 가로의 길이는?

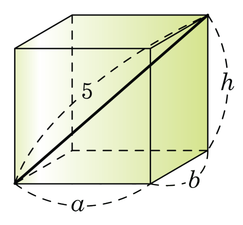


① 19　② $\frac{68}{3}$　③ $\frac{70}{3}$　④ 24　⑤ $\frac{76}{3}$

31. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

답: ________

32. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h 이고, 대각선의 길이가 5인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?

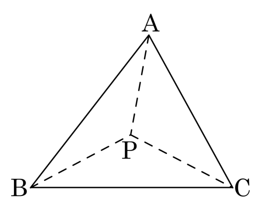


① $5\sqrt{3}$　② $4\sqrt{5}$　③ $20\sqrt{3}$　④ $25\sqrt{5}$　⑤ $24\sqrt{6}$

33. 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각 x_1, x_2, x_3라 할 때, $x_1^2+x_2^2+x_3^2$의 최솟값은?

① $-\frac{288}{25}$ ② $\frac{144}{15}$ ③ $\frac{144}{25}$ ④ $\frac{288}{25}$ ⑤ $\frac{576}{25}$

34. 넓이가 a 인 삼각형 ABC 의 내부에 한 점 P 에 대하여 $\triangle$PAB, $\triangle$PBC, $\triangle$PCA 의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3 이라 할 때 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 의 최솟값은?



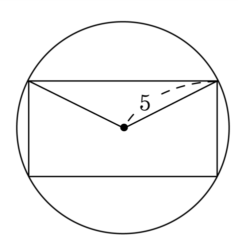
① $\dfrac{a^2}{3}$　② a^2　③ $\sqrt{3}a^2$

④ $3a^2$　⑤ $3\sqrt{3}a^2$

35. 실수 a, b 에 대하여 $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}$ 의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

36. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① $\sqrt{2}$　　② $5\sqrt{2}$　　③ $10\sqrt{2}$

④ $20\sqrt{2}$　　⑤ $100\sqrt{2}$

37. 다음은 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 <u>못한</u> 부분은?

> $\frac{1}{x}+\frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}} \cdots$ ㉠
> $= \frac{4}{\sqrt{xy}}$
> $\therefore \ \sqrt{xy} \geq 4 \cdots$ ㉡
> $\therefore \ x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2\cdot 4 = 8 \cdots$ ㉢
> 따라서 $x+y$의 최솟값은 8이다. $\cdots\cdots$ ㉣

① ㉠　② ㉡
③ ㉢　④ ㉣
⑤ 틀린 곳이 없다.

38. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수 $a,\ b,\ H$에 대하여
적당한 실수 r가 존재하여
$a = H + \frac{a}{r},\ H = b + \frac{b}{r} \cdots\ (A)$가 성립한다고 하자.
그러면 $a \neq b$이고 $\frac{a-H}{a} =$ (가) $\cdots (B)$ 이므로
$H =$ (나)이다.
역으로, $a \neq b$인 양수 $a,\ b$에 대하여
$H =$ (나)이면,
식 (B)가 성립하고 $\frac{a-H}{a} \neq 0$이다.
(B)에서 $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$이라 놓으면
식 (A)가 성립한다. 따라서 양수 $a,\ b,\ H$에 대하여 적당한 실수
r이 존재하여
식 (A)가 성립하기 위한 (다) 조건은
$a \neq b$이고 $H =$(나)이다.

위의 증명에서 (가) , (나) , (다)에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

① $\frac{H-b}{b},\ \ \frac{2ab}{a+b}$, 필요충분
② $\frac{H-b}{b},\ \ \frac{ab}{a+b}$, 필요충분
③ $\frac{H-b}{b},\ \ \frac{2ab}{a+b}$, 충분
④ $\frac{b-H}{b},\ \ \frac{2ab}{a+b}$, 필요
⑤ $\frac{b-H}{b},\ \ \frac{ab}{a+b}$, 충분

39. $x > -1$ 일 때 $x + \dfrac{1}{x+1}$ 의 최솟값을 m, 그 때의 x 의 값을 k 라 할 때 $m + k$ 의 값을 구하여라.

답: ________

40. $a^2+b^2=2$, $x^2+y^2=2$일 때, $ax+by$의 최댓값과 $ab+xy$의 최댓값의 합은?(단, 문자는 모두 실수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

41. $x > 2$일 때, $2x - 3 + \dfrac{1}{x-2}$의 최솟값을 a, 그 때의 x의 값을 b라 할 때, $a + 2b$의 값을 구하면?

① $5 + \sqrt{2}$　② $5 + 2\sqrt{2}$　③ $5 + 3\sqrt{2}$
④ $5 + 4\sqrt{2}$　⑤ $5 + 6\sqrt{2}$

42. 다음은 양수 x, y, z가 $x^2+y^2+z^2=1$을 만족할 때, $P=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$의 최솟값을 구하는 과정이다.

$$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2x^2+2y^2+2z^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2(x^2+y^2+z^2)$$

$\therefore P^2 \geq$ (가)

따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,

등호는 $x=y=z=$(다) 일 때, 성립한다.

위의 과정에서 (가)~(다) 에 각각 알맞은 것은?

① 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$ ② 9, 3, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ③ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}$

④ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑤ 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$

43. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ (a > 0, b > 0)$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, $\triangle$OBC 의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ $2\sqrt{6}$

44. $a > 1$일 때, $\frac{1}{a-1} + 4a - 3$의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

45. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0,\ b>0)$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, $\triangle\mathrm{OBC}$의 최소 넓이는?

① 3　② 3.5　③ 4　④ 4.5　⑤ 5

46. 제곱의 합이 일정한 두 실수 a, b에 대하여 $a+2b$가 최대일 때, a와 b사이의 관계는?

① $b=2a$ ② $a=2b$ ③ $a=b$

④ $a^2=b$ ⑤ $b^2=a$

47. $x+y+z=4$, $x^2+y^2+z^2=6$을 만족하는 실수 x, y, z에 대하여 x가 취할 수 있는 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\frac{M}{m}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

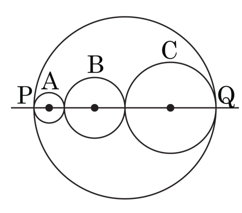
48. 삼각형의 세 변의 길이를 $a,\ b,\ c$라 하고 $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$라 할 때, $(s-a)(s-b)(s-c)\le kabc$를 만족시키는 상수 k의 값을 구하면?

① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{1}{4}$　③ $\dfrac{1}{7}$　④ $\dfrac{1}{8}$　⑤ $\dfrac{1}{12}$

49. 두 이차방정식 $x^2-ax+b=0$과 $x^2-bx+a=0$이 모두 두 개의 양의 근을 갖도록 두 실수 a, b의 값을 정할 때, $x^2-ax+b=0$의 두 근을 α, β, $x^2-bx+a=0$의 근을 γ, σ라 하자. 이 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{9}{\gamma}+\frac{9}{\sigma}$의 최솟값을 구하여라.

답: ________

50. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겉넓이의 총합이 40π일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



① $4\sqrt{35}$　② $6\sqrt{35}$　③ $8\sqrt{35}$　④ $10\sqrt{35}$　⑤ $12\sqrt{35}$