

1.  $2a + 3b = 12$ 를 만족하는 양수  $a, b$ 에 대하여  $ab$ 의 최댓값을 구하면?

① 12

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 4

해설

$$12 = 2a + 3b \geq 2\sqrt{6ab}$$

$$6 \geq \sqrt{6ab}, 36 \geq 6ab \quad \therefore 6 \geq ab$$

2. 양수  $a, b, c$ 에 대하여  $a + b + c = 9$ 일 때  $abc$ 의 최댓값은?

① 19

② 21

③ 23

④ 25

⑤ 27

해설

$$a + b + c \geq 3 \sqrt[3]{abc} \text{에서 } 9 \geq 3 \sqrt[3]{abc}, \\ 3 \geq \sqrt[3]{abc}, \quad 27 \geq abc$$

3.  $x \geq 0, y \geq 0$ 이고  $x + 3y = 8$ 일 때,  $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은?

- ① 2                      ② 3                      ③  $\sqrt{10}$                       ④  $\sqrt{15}$                       ⑤ 4

해설

$x, y$ 가 실수이므로  
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여  
 $(\sqrt{x} + \sqrt{3y})^2 \leq (1^2 + 1^2)(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{3y})^2$   
 $= 2(x + 3y)$   
 $= 16$  (단, 등호는  $x = 3y$ 일 때 성립)  
그런데  $\sqrt{x} + \sqrt{3y} \geq 0$ 이므로  
 $0 \leq \sqrt{x} + \sqrt{3y} \leq 4$   
따라서  $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은 4이다.

4. 두 양수  $a, b$ 에 대하여 다음 설명 중 틀린 것은?

- ①  $a, b$ 의 산술 평균은  $\frac{a+b}{2}$ 이다.
- ②  $\sqrt{ab}$ 는  $a, b$ 의 기하평균이다.
- ③  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 은 절대부등식이다.
- ④  $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 이면 반드시  $b = \frac{1}{a}$ 이다.
- ⑤  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ 는 항상 성립한다.

해설

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \dots$  절대부등식

$\frac{a+b}{2}$ : 산술평균,  $\sqrt{ab}$ : 기하평균

④: 절대부등식의 등호는  $a = b$ 일 때 성립한다.

5. 양수  $a, b$ 에 대하여  $a^2 + b^2 = 1$ 을 만족할 때,  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은?

- ① 2      ② 4      ③ 6      ④ 8      ⑤ 10

해설

$a^2 > 0, b^2 > 0$  이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$$

(단, 등호는  $a^2 = b^2$  일 때 성립)

그런데  $a^2 + b^2 = 1$  이므로  $1 \geq 2ab$

$$\therefore ab \leq \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{a^2} > 0, \frac{1}{b^2} > 0$ 이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}}$$

$$\frac{2}{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

(단, 등호는  $a^2 = b^2$  일 때 성립)

따라서  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

6. 방정식  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 양의 정수  $x, y$ 에 대하여  $xy$ 의 최솟값은?

① 16      ② 17      ③ 18      ④ 19      ⑤ 20

해설

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}, \frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{1}{xy}}$$

$$\therefore \frac{1}{16} \geq \frac{1}{xy}$$

따라서  $xy \geq 16$  이므로  $xy$ 의 최솟값은 16

7.  $x + y = 3$  일 때,  $xy$  의 최댓값을 구하여라. (단,  $xy > 0$  )

▶ 답 :

▷ 정답 :  $\frac{9}{4}$

해설

$$3 = x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

따라서  $x = y = \frac{3}{2}$  일 때,  $xy$  의 최댓값  $\frac{9}{4}$

8.  $x$ 가 양의 실수 일 때,  $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의  $x$ 값을 차례대로

구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0, \frac{1}{x^2} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

등호는  $x^2 = \frac{1}{x^2}$  일 때 성립하므로  $x^4 = 1$

따라서 양의 실수  $x$ 는 1이다.

최솟값은 3이고,  $x$ 값은 1이다.

9.  $x > 3$ 일 때  $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$ 의 최솟값은?

① 3

② 5

③ 12

④ 15

⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

이 때,  $x > 3$ 이므로  $3(x-3) > 0$ ,  $\frac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$$\begin{aligned} & 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11 \\ & \geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11 \\ & = 2 \cdot 3 + 11 = 17 \end{aligned}$$

(단, 등호는  $3(x-3) = \frac{3}{x-3}$ , 즉  $x = 4$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

10. 양수  $x$ 에 대하여  $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최솟값은?

①  $2\sqrt{3}$

②  $2\sqrt[3]{3}$

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$x > 0$ 이므로

$$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$$

(단, 등호는  $x = \frac{1}{2}$ 일 때 성립)

11. 양수  $x$ 에 대하여  $\frac{x^2+2x+2}{x}$ 는  $x = a$ 에서 최솟값  $b$ 를 가질 때,  
 $-2a + b + 1$ 의 값은?

① 3                      ② 4                      ③ 5                      ④ 6                      ⑤ 7

해설

$x > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x} = x + 2 + \frac{2}{x}$$

$$x + \frac{2}{x} + 2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

(단, 등호는  $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립)

최솟값이  $2\sqrt{2} + 2$ 이므로  $b = 2\sqrt{2} + 2$

등호는  $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립하므로  $a = \sqrt{2}$

따라서  $-2a + b + 1 = -2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} + 2) + 1 = 3$

12. 실수  $x, y$ 에 대하여  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 이 성립할 때,  $x + y$ 의 최댓값은?

- ①  $\sqrt{7}$       ② 3      ③  $\sqrt{13}$       ④ 5      ⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$$(2^2 + 3^2) \left\{ \left( \frac{x}{2} \right)^2 + \left( \frac{y}{3} \right)^2 \right\} \geq (x + y)^2$$

$13 \geq (x + y)^2$  이므로

$$-\sqrt{13} \leq x + y \leq \sqrt{13}$$

$\therefore x + y$ 의 최댓값은  $\sqrt{13}$

13.  $a, b, x, y$ 가 실수이고,  $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$ 일 때  $ax + by$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16      ② -4      ③ 0      ④ 4      ⑤ 16

해설

$a, b, x, y$ 가 실수이므로  
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여  
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$   
 $8 \times 2 \geq (ax + by)^2$   
 $\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$   
(최댓값)  $\times$  (최솟값) = -16

14. 실수  $a, b, x, y$ 에 대하여  $a^2 + b^2 = 5, x^2 + y^2 = 3$ 일 때 다음 중  $ax + by$ 의 값이 될 수 없는 것은?

①  $-1$       ②  $0$       ③  $2$       ④  $3$       ⑤  $4$

해설

$a, b, x, y$ 가 실수이므로  
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여  
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$   
 $5 \times 3 \geq (ax + by)^2$   
 $\therefore -\sqrt{15} \leq ax + by \leq \sqrt{15}$   
따라서 4는  $ax + by$ 의 범위에 속하지 않는다.

15. 실수  $x, y, z$ 에 대하여  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  일 때  $x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z$ 의 최댓값  $M$ 과 최솟값  $m$ 은?

①  $M = 3, m = 0$

②  $M = 3, m = -3$

③  $M = 6, m = 0$

④  $M = 6, m = -6$

⑤  $M = 6, m = -12$

해설

$x, y, z$ 가 실수이므로  
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여  
 $\{1 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\} (x^2 + y^2 + z^2)$   
 $\geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$   
 $36 \geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$   
 $-6 \leq x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z \leq 6$   
 $\therefore M = 6, m = -6$

16. 실수  $x, y, z$ 에 대하여  $x - y + 4z = 3\sqrt{2}$ 일 때  $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은?

- ①  $\frac{1}{3}$       ②  $\frac{1}{2}$       ③ 1      ④ 2      ⑤ 3

해설

$x, y, z$ 가 실수이므로  
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여  
 $\{1 + (-1)^2 + 4^2\}(x^2 + y^2 + z^2)$   
 $\geq (x - y + 4z)^2$   
 $18(x^2 + y^2 + z^2) \geq (3\sqrt{2})^2$   
 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$   
따라서  $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은 1이다.

17.  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고,  $a + b + c = 14$ 일 때,  $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 2^2 + 3^2) \{ (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \}$$

$$\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$$

$$(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2 \leq 14(a + b + c) = 14^2$$

이 때  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로

$$0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$$

따라서 최댓값은 14이다.

18. 서로 다른 두 양수  $a, b$  에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단,  $a \neq b$ )

①  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

②  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

③  $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

④  $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

⑤  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

해설

$a > 0, b > 0$  일 때, 산술·기하·조화·평균의 관계에서

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \quad (\text{등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

그런데 문제의 조건에서  $a \neq b$  이므로

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

19. 다음은  $a \geq 0, b \geq 0$ 인 두 실수  $a, b$ 에 대하여  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

$$\begin{aligned} & \left[ \text{㉞} \right] - \left[ \text{㉝} \right] \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \left[ \text{㉜} \right] \end{aligned}$$

따라서,  $\left[ \text{㉞} \right] \geq \left[ \text{㉝} \right]$   
한편, 등호는  $\left[ \text{㉜} \right]$ 일 때 성립한다.

위의 증명에서 ㉞, ㉝, ㉜, ㉜에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① ㉞  $a+b$  ㉝  $\sqrt{ab}$  ㉜  $\geq 0$  ㉜  $a=0, b=0$

② ㉞  $\frac{a+b}{2}$  ㉝  $2\sqrt{ab}$  ㉜  $\leq 0$  ㉜  $a=0, b=0$

③ ㉞  $\frac{a+b}{2}$  ㉝  $\sqrt{ab}$  ㉜  $\geq 0$  ㉜  $a=b$

④ ㉞  $\sqrt{ab}$  ㉝  $a+b$  ㉜  $\geq 0$  ㉜  $a=b$

⑤ ㉞  $2\sqrt{ab}$  ㉝  $\frac{a+b}{2}$  ㉜  $\leq 0$  ㉜  $a=0, b=0$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \\ \therefore \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \end{aligned}$$

한편, 등호는  $a=b$ 일 때 성립한다.

20.  $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수  $a, b, c$ 에 대하여  $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면  
 $1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$   
이때,  $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면  
 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$   
(단, 등호는  $a=b=c$ 일 때 성립)  
 $ab+bc+ca \geq 3([가])$   
(단, 등호는  $a=b=c$ 일 때 성립)  
 $\therefore S \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$   
 $= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$   
따라서  $\sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, abc \leq 1$   
(단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다]에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

- ①  $abc, a=b=c=1$
- ②  $\sqrt[3]{abc}, a=2$ 이고  $b=c$
- ③  $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=1$
- ④  $abc, a=b$ 이고  $c=2$
- ⑤  $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=2$

해설

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면  
 $1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$   
이 때  $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로  
산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면  
 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$   
(단, 등호는  $a=b=c$ 일 때 성립)  
 $ab+bc+ca \geq 3(\sqrt[3]{abc})^2$   
(단, 등호는  $a=b=c$ 일 때 성립)  
 $\therefore 8 \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$   
 $= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$   
따라서  $\sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, abc \leq 1$   
(단, 등호는  $a=b=c=1$ 일 때 성립)

21. 다음은  $a > 0, b > 0$  일 때  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  임을 증명한 것이다. (       )

안에 알맞은 것은?

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\quad)^2}{2} \geq 0$$

- ①  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

②  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

③  $a + b$
- ④  $a - b$

⑤  $ab$

해설

$$\begin{aligned} \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} &= \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

22.  $a > 0, b > 0$  일 때, 다음 식의 최솟값을 구하여라.

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) &= ab + \frac{4}{ab} + 5 \\ &\geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} + 5 = 9\end{aligned}$$

따라서, 최솟값은 9

23. 한 자리의 자연수  $l, m, n$ 에 대하여  $\{l, m, n\} = \{p, q, r\}$ 가 성립한다고 한다. 이 때,  $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r}$ 의 최소값은?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

해설

$$\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} \geq 3 \times 3 \sqrt{\frac{l}{p} \times \frac{m}{q} \times \frac{n}{r}}$$

그런데  $\{l, m, n\} = \{p, q, r\}$ 이므로  $lmn = pqr$ 이다.

따라서,  $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} \geq 3$

(단, 등호는  $l = p, m = q, n = r$ 일 때 성립)

$\therefore$  구하는 최소값은 3

24.  $a > 0, b > 0, c > 0$  일 때,  $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$  의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$$

25.  $a > 0, b > 0, c > 0$  일 때,  $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c}$  의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 6$$

26. 길이가 16m인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

①  $8\text{ m}^2$     ②  $16\text{ m}^2$     ③  $25\text{ m}^2$     ④  $36\text{ m}^2$     ⑤  $64\text{ m}^2$

해설

가로를  $x$ , 세로를  $y$ 라 하자.

$$2(x+y)=16 \quad x+y=8$$

산술기하평균을 사용하면,

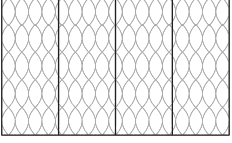
$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$4 \geq \sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow 16 \geq xy$$

$\therefore$  넓이의 최대값 :  $16(\text{m}^2)$

27. 어떤 농부가 길이 60 m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



- ① 60m<sup>2</sup>
- ② 70m<sup>2</sup>
- ③ 80m<sup>2</sup>
- ④ 90m<sup>2</sup>
- ⑤ 100m<sup>2</sup>

해설

전체 직사각형의 가로를  $a$ , 세로를  $b$ 라 하면

$$2a + 5b = 60$$

$a, b$ 는 양수이므로

$$60 = 2a + 5b \geq 2\sqrt{2a \cdot 5b}$$

양변을 제곱하면  $40ab \leq 60^2$

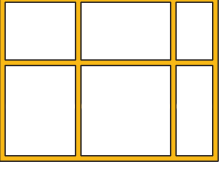
$$\therefore ab \leq 90$$

한편, 직사각형의 넓이는  $S = ab$ 이므로

$$S = ab \leq 90$$

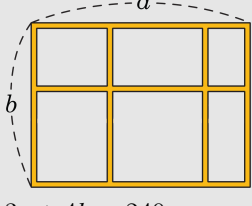
따라서, 넓이의 최댓값은 90(m<sup>2</sup>)

28. 길이가 240인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로와 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



- ① (600, 40)      ② (1200, 40)      ③ (600, 30)  
④ (1200, 30)      ⑤ (450, 60)

해설



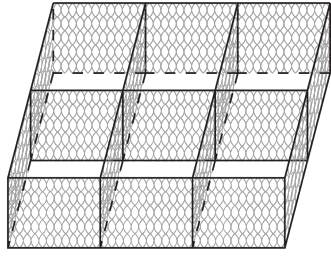
$$\begin{aligned} 3a + 4b &= 240 \\ 3a + 4b &\geq 2 \cdot \sqrt{3a \cdot 4b} \\ 240 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{12}} &\geq \sqrt{ab} (\because 3a + 4b = 240) \\ \therefore 1200 &\geq ab \\ \text{단, 등호는 } 3a &= 4b \text{ 일 때 성립하므로,} \\ 3a + 4b &= 6a = 240, \\ \therefore a &= 40 \end{aligned}$$

29. 길이가 10인 쇠파이프를  $n$ 등분(같은 크기)으로 잘라 다른 장소로 운반하려고 한다. 길이가  $x$ 인 쇠파이프 1개를 운반하는 데 드는 비용이  $250x^2$ 원이고 쇠파이프를 한 번 자를 때 드는 비용이 1000원이라 할 때, 이 쇠파이프를 잘라서 운반하는 데 드는 최소비용은?
- ① 6000원                      ② 7000원                      ③ 8000원  
④ 9000원                      ⑤ 10000원

해설

$$\begin{aligned} &\text{쇠파이프 한 개의 길이 : } \frac{10}{n} \\ &(\text{총 비용}) = 250 \left( \frac{10}{n} \right)^2 \times n + 1000(n-1) \\ &= \frac{25000}{n} + 1000n - 1000 \\ &\geq 2 \sqrt{\frac{25000}{n} \times 1000n} - 1000 \\ &= 2 \times 5000 - 1000 \\ &= 10000 - 1000 = 9000 \end{aligned}$$

30. 동원이 길이 152m인 철망을 가지고 다음 그림과 같이 여섯 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이가 최대가 될 때, 전체 직사각형의 가로 길이는?



- ① 19      ②  $\frac{68}{3}$       ③  $\frac{70}{3}$       ④ 24      ⑤  $\frac{76}{3}$

해설

가로의 길이를  $x$ , 세로의 길이를  $y$  라 하면  
 $152 = 3x + 4y \geq 2\sqrt{12xy}$ 이고  
등호가 성립할 때,  $xy$ 가 최대가 된다.  
 $3x = 4y$  일 때, 등호가 성립하므로  
 $6x = 152$   
즉,  $x = \frac{76}{3}$  일 때, 전체 우리의 넓이가 최대가 된다.

31. 두 실수  $x, y$ 의 제곱의 합이 10일 때,  $x + 3y$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 한다. 이 때,  $M - m$ 의 값을 구하여라.

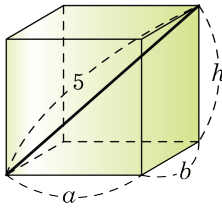
▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해  
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$   
 $x^2 + y^2 = 10$ 이므로  $100 \geq (x + 3y)^2$   
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$   
 $\therefore M = 10, m = -10$   
 $\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$

32. 코시-슈바르츠 부등식  $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각  $a, b, h$ 이고, 대각선의 길이가 5인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



- ①  $5\sqrt{3}$       ②  $4\sqrt{5}$       ③  $20\sqrt{3}$   
 ④  $25\sqrt{5}$       ⑤  $24\sqrt{6}$

해설

$a^2 + b^2 + h^2 = 25$   
 코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.  
 $(a^2 + b^2 + h^2)(4^2 + 4^2 + 4^2) \geq (4a + 4b + 4h)^2$   
 $25 \cdot 48 \geq (4a + 4b + 4h)^2$   
 $\Rightarrow 4(a + b + h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$   
 $\therefore$  모서리의 길이의 합  $4(a + b + h)$ 의 최댓값  
 $: 20\sqrt{3}$

33. 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ 라 할 때,  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 의 최솟값은?

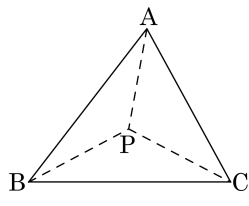
- ①  $-\frac{288}{25}$     ②  $\frac{144}{15}$     ③  $\frac{144}{25}$     ④  $\frac{288}{25}$     ⑤  $\frac{576}{25}$

해설

주어진 삼각형의 세 변을  
 $\overline{AB} = 10$ ,  $\overline{BC} = 6$ ,  $\overline{CA} = 8$ 이라 하면  
 $\angle C$ 가 직각인 직각삼각형이므로  
 $\triangle ABC = \triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PAC$   
 $\therefore 24 = \frac{1}{2} \times x_1 \times 6 + \frac{1}{2} \times x_2 \times 8 + \frac{1}{2} \times x_3 \times 10$ 이므로  
 $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 24$   
코시-슈바르츠 부등식에서  
 $(3^2 + 4^2 + 5^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \geq (3x_1 + 4x_2 + 5x_3)^2$   
 $\therefore 50 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \geq 576$   
 $\therefore x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq \frac{576}{50} = \frac{288}{25}$   
따라서 최솟값은  $\frac{288}{25}$

34. 넓이가  $a$ 인 삼각형 ABC의 내부에 한 점 P에 대하여  $\triangle PAB$ ,  $\triangle PBC$ ,  $\triangle PCA$ 의 넓이를 각각  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ 이라 할 때  $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 의 최솟값은?

- ①  $\frac{a^2}{3}$       ②  $a^2$       ③  $\sqrt{3}a^2$   
 ④  $3a^2$       ⑤  $3\sqrt{3}a^2$



해설

$$S_1 + S_2 + S_3 = a$$

$$(1^2 + 1^2 + 1^2)(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \geq (S_1 + S_2 + S_3)^2 = a^2$$

$$\therefore S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \geq \frac{a^2}{3}$$

35. 실수  $a, b$  에 대하여  $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$  의 최댓값은?

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

해설

$a, b$  가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a^2 + b^2)(1^2 + 1^2) \geq (a + b)^2$  에서

$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$  이므로

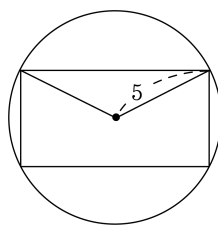
$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2} = \frac{(a + b)^2}{a^2 + b^2} \leq \frac{2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = 2$$

(단, 등호는  $a = b$  일 때 성립)

따라서  $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$  의 최댓값은 2이다.

36. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?

- ①  $\sqrt{2}$       ②  $5\sqrt{2}$       ③  $10\sqrt{2}$   
 ④  $20\sqrt{2}$       ⑤  $100\sqrt{2}$



해설

직사각형의 대각선의 길이는 10 이고,  
 가로와 길이를  $a$ , 세로의 길이를  $b$  라 하면  
 $a^2 + b^2 = 100$   
 코시-슈바르츠의 부등식에 의해  
 $(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$   
 $\therefore 200 \geq (a + b)^2 \therefore a + b \leq 10\sqrt{2}$ 이므로  
 직사각형 둘레의 길이의 최댓값은  
 $2(a + b) = 20\sqrt{2}$

37. 다음은  $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$ 을 만족하는 두 양수  $x, y$ 에 대하여  $x+y$ 의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 못한 부분은?

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{4}{y} &\geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{4}{y}} \cdots \textcircled{㉠} \\ &= \frac{4}{\sqrt{xy}} \\ \therefore \sqrt{xy} &\geq 4 \cdots \textcircled{㉡} \\ \therefore x+y &\geq 2\sqrt{xy} \geq 2 \cdot 4 = 8 \cdots \textcircled{㉢} \\ \text{따라서 } x+y \text{의 최솟값은 } 8 \text{이다. } &\cdots \cdots \textcircled{㉣} \end{aligned}$$

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉣
- ⑤ 틀린 곳이 없다.

해설

㉠에서 등호가 성립하는 경우는  $\frac{1}{x} = \frac{4}{y}$   
즉  $y = 4x$ 일 때이고,  
㉢에서 등호가 성립하는 경우는  
 $x = y$ 일 때이므로 서로 일치하지 않는다.  
따라서  $x+y$ 의 최솟값은 8이 될 수 없다.

38. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수  $a, b, H$ 에 대하여  
적당한 실수  $r$ 가 존재하여  
 $a = H + \frac{a}{r}, H = b + \frac{b}{r} \cdots (A)$ 가 성립한다고 하자.  
그러면  $a \neq b$ 이고  $\frac{a-H}{a} = (가) \cdots (B)$ 이므로  
 $H = (나)$ 이다.  
역으로,  $a \neq b$ 인 양수  $a, b$ 에 대하여  
 $H = (나)$ 이면,  
식  $(B)$ 가 성립하고  $\frac{a-H}{a} \neq 0$ 이다.  
 $(B)$ 에서  $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$ 이라 놓으면  
식  $(A)$ 가 성립한다. 따라서 양수  $a, b, H$ 에 대하여 적당한 실수  $r$ 이 존재하여  
식  $(A)$ 가 성립하기 위한  $(다)$  조건은  
 $a \neq b$ 이고  $H = (나)$ 이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

- ①  $\frac{H-b}{b}, \frac{2ab}{a+b}, \text{필요충분}$
- ②  $\frac{H-b}{b}, \frac{ab}{a+b}, \text{필요충분}$
- ③  $\frac{H-b}{b}, \frac{2ab}{a+b}, \text{충분}$
- ④  $\frac{b-H}{b}, \frac{2ab}{a+b}, \text{필요}$
- ⑤  $\frac{b-H}{b}, \frac{ab}{a+b}, \text{충분}$

해설

$a = H + \frac{a}{r}$ 에서  $\frac{r}{1} = \frac{a-H}{a}$   
 $H = b + \frac{b}{r}$ 에서  $\frac{r}{1} = \frac{H-b}{b}$   
 $\therefore \frac{a-H}{a} = (가) \frac{H-b}{b}$   
 $ab - bH = aH - ab$ 이므로  $H = (나) \frac{2ab}{a+b}$   
따라서 (다) 필요충분조건

39.  $x > -1$  일 때  $x + \frac{1}{x+1}$  의 최솟값을  $m$ , 그 때의  $x$  의 값을  $k$  라 할 때  $m+k$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x+1 > 0 \text{ 이므로 } x + \frac{1}{x+1} = x+1 + \frac{1}{x+1} - 1 \geq$$

$$2\sqrt{(x+1)\frac{1}{x+1}} - 1 = 1$$

$$\therefore m = 1$$

이 때 등호는

$$x+1 = \frac{1}{x+1} \text{ 에서 } x = 0, -2$$

$x > -1$  이므로 등호는  $x = 0$  일 때만 성립한다.

$$\therefore k = 0$$

$$\therefore m+k = 1$$

40.  $a^2 + b^2 = 2$ ,  $x^2 + y^2 = 2$ 일 때,  $ax + by$ 의 최댓값과  $ab + xy$ 의 최댓값의 합은?(단, 문자는 모두 실수이다.)

- ① 2      ② 4      ③ 6      ④ 8      ⑤ 10

해설

i)  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

$\therefore -2 \leq ax + by \leq 2$

ii)  $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}, \quad 1 \geq |ab|$

$\therefore -1 \leq ab \leq 1$

$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2}, \quad 1 \geq |xy|$

$\therefore -1 \leq xy \leq 1$

$\therefore -2 \leq ab + xy \leq 2$

i), ii)에서, 최댓값의 합은 4

41.  $x > 2$  일 때,  $2x - 3 + \frac{1}{x-2}$  의 최솟값을  $a$ , 그 때의  $x$  의 값을  $b$  라 할 때,  $a + 2b$  의 값을 구하면?

①  $5 + \sqrt{2}$

②  $5 + 2\sqrt{2}$

③  $5 + 3\sqrt{2}$

④  $5 + 4\sqrt{2}$

⑤  $5 + 6\sqrt{2}$

해설

산술평균, 기하평균의 관계에 따라

$$\begin{aligned} 2x - 3 + \frac{1}{x-2} &= 2(x-2) + \frac{1}{x-2} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{2(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2\sqrt{2} + 1$$

$$2(x-2) = \frac{1}{x-2} \text{ 에서}$$

$$2(x-2)^2 = 1, (x-2)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x > 2 \text{ 이므로 } b = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + 4 = 5 + 3\sqrt{2}$$

42. 다음은 양수  $x, y, z$ 가  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 을 만족할 때,  $P = \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}$ 의 최솟값을 구하는 과정이다.

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \right) + 2(x^2 + y^2 + z^2) \\ \therefore P^2 &\geq (\text{가}) \end{aligned}$$

따라서,  $P$ 의 최솟값은 (나) 이고,  
등호는  $x = y = z =$  (다) 일 때, 성립한다.

위

의 과정에서 (가)~(다)에 각각 알맞은 것은?

- ①  $2, \sqrt{2}, \frac{1}{3}$
- ②  $9, 3, \frac{1}{\sqrt{3}}$
- ③  $3, \sqrt{3}, \frac{1}{3}$
- ④  $3, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}$
- ⑤  $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + 2(x^2 + y^2 + z^2) \\ \text{조건에서 } x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \text{ 이므로} \\ P^2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \right) + 2 \\ &\geq \sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2} \cdot \frac{z^2x^2}{y^2}} + \sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{z^2}} \\ &\quad + \sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2}} + 2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2 = (3) \end{aligned}$$

$\therefore P \geq \sqrt{3}$  이므로  $P$ 의 최솟값은  $(\sqrt{3})$  이고,

등호는  $x = y = z = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  일 때 성립한다.

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 1$  이므로  $x = y = z$  이면  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  이다.

$\therefore$  (가) 3 (나)  $\sqrt{3}$  (다)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

43. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 이  $x$  축,  $y$  축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때,  $\triangle OBC$  의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

- ① 6
- ② 8
- ③ 10
- ④ 12
- ⑤  $2\sqrt{6}$

해설

$\triangle OBC$  의 넓이를  $S$  라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab,$$

A(3, 2) 는 직선  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  위의 점이므로

$$1 = \frac{3}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{3}{a} \times \frac{2}{b}} = 2\sqrt{\frac{3}{S}}$$

양변을 제곱하면  $1 \geq \frac{12}{S} \quad \therefore S \geq 12$

따라서  $\triangle OBC$  의 넓이의 최솟값은 12 이다.

44.  $a > 1$  일 때,  $\frac{1}{a-1} + 4a - 3$  의 최솟값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\frac{1}{a-1} > 0$$

$$4(a-1) + 1 + \frac{1}{a-1} \geq 2 \cdot \sqrt{4(a-1) \cdot \frac{1}{(a-1)}} + 1$$

$$= 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

45. 좌표평면 위의 점 A(1, 2)를 지나는 직선  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ )이  $x$ 축,  $y$ 축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때,  $\triangle OBC$ 의 최소 넓이는?

① 3              ② 3.5              ③ 4              ④ 4.5              ⑤ 5

해설

B( $a, 0$ ), C( $0, b$ )이므로  
 $\triangle OBC$ 의 넓이를  $S$ 라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab \cdots \cdots \textcircled{A}$$

직선  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 은 점 (1, 2)를 지나므로

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \cdots \cdots \textcircled{B}$$

①, ②에서

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}} = 2\sqrt{\frac{1}{S}}$$

$$\therefore S \geq 4$$

46. 제곱의 합이 일정한 두 실수  $a, b$ 에 대하여  $a + 2b$ 가 최대일 때,  $a$ 와  $b$ 사이의 관계는?

①  $b = 2a$

②  $a = 2b$

③  $a = b$

④  $a^2 = b$

⑤  $b^2 = a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a + 2b)^2 \leq (1^2 + 2^2)(a^2 + b^2)$$

$$\therefore (a + 2b)^2 \leq 5c$$

이 때, 등호는  $\frac{a}{1} = \frac{b}{2}$  일 때 성립

$$\therefore b = 2a$$

47.  $x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6$ 을 만족하는 실수  $x, y, z$ 에 대하여  $x$ 가 취할 수 있는 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $\frac{M}{m}$ 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$x+y+z=4$ 에서  $y+z=4-x\cdots\textcircled{A}$   
 $x^2+y^2+z^2=6$ 에서  $y^2+z^2=6-x^2\cdots\textcircled{B}$   
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여  
 $(1^2+1^2)(y^2+z^2)\geq(y+z)^2$   
(단, 등호는  $y=z$  일 때 성립)  
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 대입하면  
 $2(6-x^2)\geq(4-x)^2, 3x^2-8x+4\leq 0$   
 $(3x-2)(x-2)\leq 0 \quad \therefore \frac{2}{3}\leq x\leq 2$   
따라서  $M=2, m=\frac{2}{3}$  이므로  $\frac{M}{m}=3$

48. 삼각형의 세 변의 길이를  $a, b, c$  라 하고  $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$  라 할 때,

$(s - a)(s - b)(s - c) \leq kabc$ 를 만족시키는 상수  $k$ 의 값을 구하면?

- ①  $\frac{1}{3}$
- ②  $\frac{1}{4}$
- ③  $\frac{1}{7}$
- ④  $\frac{1}{8}$
- ⑤  $\frac{1}{12}$

해설

$$s - a = \frac{1}{2}(a + b + c) - a = \frac{1}{2}(-a + b + c) > 0$$

(  $\because a, b, c$ 는 삼각형의 세 변 )

같은 방법으로  $s - b > 0, s - c > 0$

(산술평균) $\geq$ (기하평균)이므로

$$2\sqrt{(s - a)(s - b)} \leq (s - a) + (s - b) = c$$

(등호는  $a = b$ 일 때 성립)

$$2\sqrt{(s - b)(s - c)} \leq (s - b) + (s - c) = a$$

(등호는  $b = c$ 일 때 성립)

$$2\sqrt{(s - c)(s - a)} \leq (s - c) + (s - a) = b$$

(등호는  $c = a$ 일 때 성립)

$$\text{변변 곱하면 } 8(s - a)(s - b)(s - c) \leq abc$$

$$\therefore (s - a)(s - b)(s - c) \leq \frac{1}{8}abc$$

(등호는  $a = b = c$ 일 때 성립)

$$\therefore k = \frac{1}{8}$$

49. 두 이차방정식  $x^2 - ax + b = 0$ 과  $x^2 - bx + a = 0$ 이 모두 두 개의 양의 근을 갖도록 두 실수  $a, b$ 의 값을 정할 때,  $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근을  $\alpha, \beta$ ,  $x^2 - bx + a = 0$ 의 근을  $\gamma, \sigma$ 라 하자. 이 때,  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma}$ 의 최솟값을 구하여라.

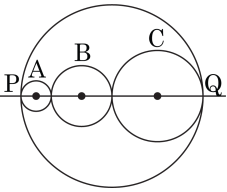
▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

두 개의 양의 근을 가진다면,  
 $\alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$ 를 만족한다.  
 $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b, \gamma + \sigma = b,$   
 $\gamma\sigma = a(a, b > 0)$   
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{9(\gamma + \sigma)}{\gamma\sigma}$$
$$= \frac{a}{b} + \frac{9b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{9b}{a}} = 6$$
$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma} \geq 6$$

50. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겹넓이의 총합이  $40\pi$  일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



- ①  $4\sqrt{35}$                       ②  $6\sqrt{35}$                       ③  $8\sqrt{35}$   
 ④  $10\sqrt{35}$                       ⑤  $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을  $x, y, z$ 라 하면  
 구의 겹넓이는  
 $S_1 = 4\pi x^2, S_2 = 4\pi y^2, S_3 = 4\pi z^2$   
 $4\pi(x^2 + y^2 + z^2) = 40\pi$   
 $\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 10$   
 $(x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 4^2 + 6^2) \geq (2x + 4y + 6z)^2$   
 $10 \cdot 56 \geq (2x + 4y + 6z)^2$   
 $4\sqrt{35} \geq 2x + 4y + 6z$   
 PQ의 길이의 최댓값은  $2(2x + 4y + 6z)$  이므로  $8\sqrt{35}$