1. $x > 0,\ y > 0$ 일 때, $(3x+4y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$x > 0,\ y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(3x+4y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right)$

$= 13 + \frac{12y}{x} + \frac{3x}{y}$

$\geq 13 + 2\sqrt{\frac{12y}{x}\cdot\frac{3x}{y}}$

$= 13 + 12 = 25$

$\therefore (3x+4y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 25$

(단, 등호는 $\frac{12y}{x} = \frac{3x}{y}$, 즉 $x = 2y$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 25 이다.

2. 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c=9$일 때 abc의 최댓값은?

① 19　② 21　③ 23　④ 25　⑤ 27

해설

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$에서 $9 \geq 3\sqrt[3]{abc}$,
$3 \geq \sqrt[3]{abc},\ \ 27 \geq abc$

3. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\dfrac{a+b+c}{a}+\dfrac{a+b+c}{b}+\dfrac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

① 9　　② 11　　③ 13　　④ 15　　⑤ 17

해설

$\dfrac{a+b+c}{a}+\dfrac{a+b+c}{b}+\dfrac{a+b+c}{c}$

$=1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{b}+1+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}+1$

$=3+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}$ 에서

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=2$

$\sqrt{\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{a}{c}}=2,\ \dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\geq 2\sqrt{\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{b}{c}}=2$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $3+6=9$

4. $x,\ y$가 실수이고 $x^2+y^2=10$일 때 $x+3y$의 최댓값은?

① 5　　② 6　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠 부등식에 의하여
$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$
이 때, $x^2+y^2=10$이므로
$100 \geq (x+3y)^2$
$\therefore -10 \leq x+3y \leq 10$
(단, 등호는 $x=\dfrac{y}{3}$일 때 성립)
따라서 최댓값은 10이다.

5. 길이가 10 인 쇠파이프를 n등분(같은 크기)으로 잘라 다른 장소로 운반하려고 한다. 길이가 x인 쇠파이프 1 개를 운반하는 데 드는 비용이 $250x^2$ 원이고 쇠파이프를 한 번 자를 때 드는 비용이 1000 원이라 할 때, 이 쇠파이프를 잘라서 운반하는 데 드는 최소비용은?

① 6000 원　② 7000 원　③ 8000 원
④ 9000 원　⑤ 10000 원

해설

쇠파이프 한 개의 길이 : $\dfrac{10}{n}$

$(\text{총 비용}) = 250\left(\dfrac{10}{n}\right)^2 \times n + 1000(n-1)$

$= \dfrac{25000}{n} + 1000n - 1000$

$\geq 2\sqrt{\dfrac{25000}{n} \times 1000n} - 1000$

$= 2 \times 5000 - 1000$

$= 10000 - 1000 = 9000$