1. 세 점 A(1, 4), B(−1, 2), C(4, a)가 일직선위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

세 점이 일직선 위에 있으면 기울기가 일치한다.

$\dfrac{2-4}{-1-1}=\dfrac{a-2}{4-(-1)}$

$\Rightarrow \quad \therefore\ a=7$

2. 원점에서의 거리가 1이고, 점 $(1,2)$를 지나는 직선의 방정식이 $ax+by+c=0$으로 표현될 때, $a+b+c$의 값을 구하면? (단, $b \neq 0$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

점 $(1,2)$를 지나는 직선은
$y=m(x-1)+2$ 에서,
$mx-y-m+2=0 \cdots$ ㉠
여기서 $(0,0)$에 이르는 거리가 1이므로
$\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\ |m-2|=\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면, $m=\frac{3}{4}$
㉠에 대입하여 정리하면, $\frac{3}{4}x-y+\frac{5}{4}=0,$
$3x-4y+5=0$
$\therefore\ a+b+c=3-4+5=4$

3. 원 $x^2 + y^2 = 8$과 직선 $y = x + k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-2 < k < 2$　② $0 < k < 4$　③ $-4 < k < 0$

④ $-2 < k < 0$　⑤ $-4 < k < 4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d를 구하면

$$d = \frac{|0+0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \quad \therefore\ -4 < k < 4$$

4. 다음 두 집합 사이의 관계를 기호 $\subset$, $\not\subset$ 를 나타냈을 경우 $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ 인 개수를 구하여라.

㉠ $A = \{a, b, c\}, B = \{a, b, c, d, e\}$
㉡ $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5\}$
㉢ $A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{x \vert x$는 6의 약수$\}$
㉣ $A = \{x \mid x$는 4 의 배수$\}, B = \{x \mid x$는 8 의 배수 $\}$

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 2 개

해설

㉠ $A \subset B$ ㉡$A \not\subset B$ ㉢ $A \subset B$ ㉣ $B \subset A$

5. 실수 x, y에 대하여 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$이 성립할 때, $x+y$의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$ ② 3 ③ $\sqrt{13}$ ④ 5 ⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$(2^2+3^2)\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2\right\} \ge (x+y)^2$

$13 \ge (x+y)^2$ 이므로

$-\sqrt{13} \le x+y \le \sqrt{13}$

$\therefore x+y$의 최댓값은 $\sqrt{13}$

6. 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{P}(0,b)$, $\mathrm{Q}(a,0)$, $\mathrm{B}(5,1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값을 k라 할 때, k^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

점 $\mathrm{A}(1,2)$의 y축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{A}'(-1,2)$, 점 $\mathrm{B}(5,1)$의 x축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{B}'(5,-1)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$

$\geq \overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{(5+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{45}$

따라서 $k=\sqrt{45}$이므로 $k^2=45$

7. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답： ______ m

▷ 정답： 30 m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$

$\therefore\ a = 30(\mathrm{m})$

8. 두 직선 $x-2y+3=0$, $2x+ay-2=0$이 $a=\alpha$일 때 수직이고, $a=\beta$일 때 평행하다. $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

두 직선 $x-2y+3=0$, $2x+ay-2=0$에 대하여

(1) 수직일 때, $1\cdot 2+(-2)\cdot a=0 \quad \therefore\ \alpha=1$

(2) 평행할 때, $\frac{1}{2}=\frac{-2}{a}\neq -\frac{3}{2}$이어야 하므로

$a=-4, \quad \therefore\ \beta=-4$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=17$

9. 두 원 $x^2 + y^2 = r^2\ (r > 0)$, $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 4$가 외접할 때, r의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2 + y^2 = r^2\ (r > 0\ )$, $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 4$의 중심 사이의 거리 $d = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

두 원이 외접하면 $r + 2 = 5$이므로 $r = 3$

10. 두 원 $x^2+y^2-x+2y-3=0$, $2x^2+2y^2-6x+ay-2=0$ 의 공통현이 직선 $y=-3x-1$ 과 직교할 때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$2(x^2+y^2-x+2y-3)-(2x^2+2y^2-6x+ay-2)=0$

즉, $4x+(4-a)y-4=0 \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠과 직선 $y=-3x-1$ 은 직교하므로

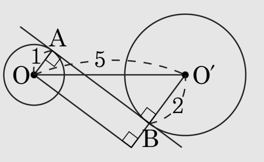
$\frac{-4}{4-a}\times(-3)=-1$ 에서 $a=16$

11. 반지름의 길이가 각각 1, 2인 두 원 O, O′ 의 중심거리가 5일 때, 두 원의 공통내접선의 길이는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

주어진 두 원의 그래프를 다음 그림과 같이 나타내면 $\overline{AB}$가 공통내접선이 된다.



점 O에서 선분 O′B의 연장선 위에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AO} = \overline{BH} = 1$

$\therefore \overline{O'H} = 1 + 2 = 3$

이때, 두 원의 중심거리가 5이므로

$\triangle OHO'$ 에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AB} = \overline{OH} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

12. $x^2+y^2=1$일 때, $2x+y$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

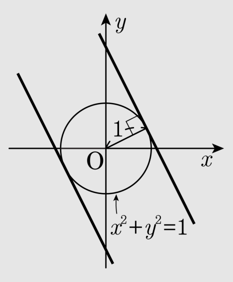
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ 정답 : 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x+y=k$라 하면 $y=-2x+k$에서 k는 기울기가 -2인 직선의 y절편이다.
주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로
점과 직선사이의 거리에서 $\dfrac{|k|}{\sqrt{5}} \le 1$

$\therefore\ -5 \le k \le \sqrt{5}$

13. 원 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 과 함수 $y=\frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 $a,\ b,\ c\ ,d$ 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=\frac{3}{2x}$ 을 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 에 대입하면

$x^2+\frac{9}{4x^2}=\frac{13}{4}$

$x\neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$4x^4-13x^2+9=(x^2-1)(4x^2-9)=0$

$\therefore\ x=\pm 1,\ \pm\frac{3}{2}$

따라서 구하는 답은

$4\times(-1)\times 1\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}\times 4=9$

14. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A)=15$, $n(A \cup B)=20$, $n(A \cap B)=8$ 일 때, $n(B)$ 는?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$
$20=15+n(B)-8$
$\therefore\ n(B)=13$

15. 점 $(a,\ b)$가 $3x+2y=6$ 위를 움직일 때, 직선 $2bx-ay=1$이 항상 지나는 정점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ ② $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ ③ $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{6}, -1\right)$

해설

$(a,\ b)$가 $3x+2y=6$ 위를 움직이므로
$3a+2b=6$
$\therefore\ b=3-\frac{3}{2}a\cdots$㉠
㉠을 $2bx-ay=1$에 대입하면
$2\left(3-\frac{3}{2}a\right)x-ay=1$
$(6-3a)x-ay=1$
$(6x-1)-(3x+y)a=0$
$\therefore\ 6x-1=0,\ 3x+y=0$
$x=\frac{1}{6},\ \ y=-\frac{1}{2}$
$\therefore\ \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

16. y축 위의 한 점 P로부터 두 직선 $x-y+3=0$, $x-y-1=0$ 에 이르는 거리가 같을 때, 점 P 의 좌표는?

① $(1\ ,-2\ )$　② $(-1\ ,2\ )$　③ $(0\ ,2\ )$
④ $(0\ ,1\ )$　⑤ $(0\ ,-2\ )$

해설

y 축 위의 한 점을 P $(0, y)$ 라 하면 직선
$x-y+3=0$ 과 점 P 사이의 거리는

$$d_1 = \frac{|-y+3|}{\sqrt{2}}$$

직선 $x-y-1=0$
과 점 P 사이의 거리는

$$d_2 = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$

$d_1 = d_2$ 이므로

$$\frac{|-y+3|}{\sqrt{2}} = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$

양변을 제곱하여 정리하면
$-8y = -8 \therefore y = 1$
$\therefore P\ (0\ ,1\ )$

17. 두 집합 $A = \{x | x\text{는 20보다 작은 4의 배수}\}$, $B = \{1,\ a,\ 2+a,\ 8,\ 8a\}$ 에서 $A \cap B = \{4,\ 8,\ 16\}$ 일 때, $A \cup B$는?(단, a 는 자연수이다.)

① $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$

② $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16\}$

③ $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20\}$

④ $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 32\}$

⑤ $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24,\ 32\}$

해설

$A = \{4,\ 8,\ 12,\ 16\}$

$A \cap B = \{4,\ 8,\ 16\}$ 이므로 $4 \in B$, $8 \in B$, $16 \in B$ 이다.

이 때, a 가 자연수라 했으므로, $a < 2 + a < 8a$ 이다.

따라서 $8a \neq 4$, $8a \neq 8$ 이다.

$8a = 16 \quad \therefore\ a = 2$

$B = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$

$\therefore\ A \cup B = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16\}$

18. 이차방정식 $x^2-4x+4a=0$ (a는 실수) 이 허근을 가질 때, $a-1+\dfrac{9}{a-1}$의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^2-4x+4a=0$이 허근을 가지므로

$\dfrac{D}{4}=4-4a<0$

$\therefore a>1$

$\therefore (a-1)+\dfrac{9}{(a-1)} \geq 2\sqrt{(a-1)\cdot\dfrac{9}{(a-1)}}=6$

따라서 최솟값은 6

19. 전체집합 $U = \left\{2x | x \le 10,\ x\text{는 자연수}\right\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{x | 5 < x < 15\}$ 일 때, $A^c \cap B^c = \varnothing, n(A \cap B) = 4$ 를 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$U = \{2x | x \le 10$, x 는 자연수$\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
,
$A = \{x | 5 < x < 15\} = \{6, 8, 10, 12, 14\}$,
$A^c \cap B^c = \varnothing \to n(A \cup B) = U$ 이고, $n(A \cap B) = 4$ 를 만족하는 집합 B 는 A 의 원소 중 4 개는 반드시 포함하고, 나머지 하나는 반드시 포함하지 않으며 A^c 의 원소를 모두 포함하는 부분집합이다.

(1) A 의 원소 중 $\{6, 8, 10, 12\}$ 를 반드시 포함하고 14 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 $2, 4, 16, 18, 20$ 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)
(2) A 의 원소 중 $\{6, 8, 10, 14\}$ 를 반드시 포함하고 14 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 $2, 4, 16, 18, 20$ 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)
(3) A 의 원소 중 $\{6, 8, 12, 14\}$ 를 반드시 포함하고 14 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 $2, 4, 16, 18, 20$ 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)
(4) A 의 원소 중 $\{6, 10, 12, 14\}$ 를 반드시 포함하고 14 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 $2, 4, 16, 18, 20$ 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)
(5) A 의 원소 중 $\{8, 10, 12, 14\}$ 를 반드시 포함하고 14 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 $2, 4, 16, 18, 20$ 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)

따라서 집합 B 의 개수는 $1 \times 5 = 5$ (개)

20. 양수 a, b에 대하여 다음 식 $a^2 + b + \frac{16}{2a+b}$의 최솟값과 그 때의 a, b의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최솟값$= 7$

▷ 정답 : $a = 1$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$a^2 + b + \frac{16}{2a+b}$

$= -1 + (a^2 - 2a + 1) + 2a + b + \frac{16}{2a+b}$

$= -1 + (a-1)^2 + (2a + b + \frac{16}{2a+b}) \quad \cdots \quad ①$

$2a + b + \frac{16}{2a+b} \geq 2\sqrt{(2a+b)(\frac{16}{2a+b})} = 8$에서

등호는 $2a + b = \frac{16}{2a+b}$ 일 때 성립하고

이때, $2a + b = 4$ (a, b는양수) $\cdots$ ②

①에서 최소는 $a = 1$ 일 때이다.

$\therefore$ ②에서 $a = 1, b = 2$일 때 최솟값 : 7