

1. x 에 대한 다항식 $A = 2x^3 + 5x^2 + 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x + 1$ 이고, 나머지가 $-6x + 2$ 이다. 이 때, 다항식 B 를 구하면?

- ① $x^2 + 2x + 2$ ② $x^2 + x + 2$ ③ $x^2 - x + 2$
④ $x^2 - 2x + 2$ ⑤ $x^2 - 3x + 2$

해설

$$\begin{aligned} A &= B(2x + 1) - 6x + 2 \text{ 에서} \\ B(2x + 1) &= 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2 \\ \therefore B &= (2x^3 + 5x^2 + 6x + 2) \div (2x + 1) \\ &= x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

2. $i + i^3 + i^5 + i^7 + \cdots + i^{101} = a + bi$ 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

(좌변) $= i - i + i - i + \cdots + i = i$ 이므로

$i = a + bi$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a = 0, b = 1$

$\therefore a + b = 1$

3. x 에 대한 이차방정식 $kx^2 + (2k+1)x + 6 = 0$ 의 해가 2, α 일 때, $k + \alpha$ 의 값을 구하면?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

해가 2, α 라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.

$$k \cdot 2^2 + (2k+1)2 + 6 = 0$$

$$4k + 4k + 8 = 0 \text{에서 } k = -1$$

$k = -1$ 을 방정식에 대입하고 α 를 구한다.

$$-x^2 - x + 6 = 0, x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0, x = 2, -3$$

$$\therefore k = -1, \alpha = -3$$

$$\therefore k + \alpha = -4$$

4. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서
 $x^2 = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 13t + 36 = 0, (t - 4)(t - 9) = 0$
 $\therefore t = 4$ 또는 $t = 9$
(i) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$
 $\therefore x = \pm 2$
(ii) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$
 $\therefore x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
 $(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

5. 연립방정식
$$\begin{cases} x + 2y = 2 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ 2y + 3z = 0 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ x + 3z = 0 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

의 해를 $x = a, y = b, z = c$ 라 할 때, $a(b + c)$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉢}$ 에서 $2y - x = 0 \cdots \cdots \cdots \textcircled{㉣}$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉣}$ 에서 $4y = 2 \quad \therefore y = \frac{1}{2} \cdots \cdots \cdots \textcircled{㉤}$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉣}$ 에서 $x = 1, z = -\frac{1}{3}$

$\therefore a(b + c) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$

6. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 1$ 일 때 부등식 $cx^2 - bx - a > 0$ 을 만족하는 한 자리의 자연수 x 의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 1$ 이므로 $a < 0$
해가 $-2 < x < 1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1) < 0$,
즉 $x^2 + x - 2 < 0$ 양변에 a 를 곱하면
 $ax^2 + ax - 2a > 0$ 이 부등식이
 $ax^2 + bx + c > 0$ 과 같으므로
 $b = a, c = -2a \cdots (가)$
(가)를 $cx^2 - bx - a > 0$ 에 대입하면
 $-2ax^2 - ax - a > 0, 2x^2 + x + 1 > 0 (\because -a > 0)$
이 때 방정식 $2x^2 + x + 1 = 0$ 의 판별식
 $D = 1^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로
 $2x^2 + x + 1 > 0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1, 2, 3, \dots, 9$ 의 9개이다.

7. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x^2 - 4x < 5 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-1 < x < 2$

해설

부등식 $x^2 - 4 < 0$ 에서 $(x+2)(x-2) < 0$

$\therefore -2 < x < 2 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

$x^2 - 4x < 5$ 에서 $x^2 - 4x - 5 < 0$

$(x+1)(x-5) < 0$

$\therefore -1 < x < 5 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

따라서 구하는 해는 ㉠과 ㉡를

동시에 만족하는 x 의 값이므로

$\therefore -1 < x < 2$

8. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ 에 대하여 $f(x-1) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ 일 때, 상수 $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

$$\begin{aligned} f(x-1) &= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 2(x-1) + 5 \\ &= x^3 + Ax^2 + Bx + C \cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

㉠은 x 에 대한 항등식이므로
양변에 $x = 0, 1, 2$ 를 차례로 대입하면,
 $x = 0$ 일 때, $-1 = C$
 $x = 1$ 일 때, $5 = 1 + A + B + C$
 $x = 2$ 일 때, $5 = 8 + 4A + 2B + C$
위의 세 식을 연립하여 풀면
 $A = -6, B = 11, C = -1$

9. $(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)^4(2x - 1)^7$ 을 전개했을 때, 모든 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)^4 \cdot (2x - 1)^7$
 $= a_0x^{19} + a_1x^{18} + a_2x^{17} + \cdots + a_{19}$ 로 놓으면
계수들의 총합 $a_0 + a_1 + \cdots + a_{19}$ 는 양변에 $x = 1$ 을 대입한
결과와 같으므로 항등식의 성질에서
 $(1 + 2 - 3 + 2)^4 \cdot (2 - 1)^7 = 2^4 = 16$

10. x^3 의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 가 $x-1$ 을 인수로 갖고, x^2+2 로 나누었을 때의 나머지는 $x+5$ 이다. 이 때, $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는?

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

x^3 의 계수가 1이므로
 $f(x) = (x^2 + 2)(x + \alpha) + x + 5 \cdots \textcircled{1}$
 $x-1$ 의 인수를 가지므로, $f(1) = 0$
 $\textcircled{1}$ 에 넣어 계산하면,
 $f(1) = 3(1 + \alpha) + 6 = 0, \alpha = -3$
 $\therefore f(2) = (2^2 + 2)(2 - 3) + 2 + 5 = 1$

11. 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라. (a, b, c, d 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2 \\&= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2 \\&= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2) \\ \therefore a + b + c + d &= 4\end{aligned}$$

12. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 3(k + i) - k(1 - i)^2$ 의 값이 순허수가 될 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$z = 3(k + i) - k(1 - i)^2$ 를 정리하면

$z = 3k + 3i + 2ki = 3k + (3 + 2k)i$

이것이 순허수이려면 $3k = 0$, $3 + 2k \neq 0$

$k = 0$ 이므로 $z = 3i$, $\bar{z} = -3i$

$\therefore z \cdot \bar{z} = 3i \cdot -3i = 9$

13. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 \\ y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 1

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 & \dots ① \\ y^2 - xy - 1 = 0 & \dots ② \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ① - ② $\times 2$ 를 계산하여 정리하면

$$x^2 + xy - 2y^2 = 0, (x + 2y)(x - y) = 0$$

$\therefore x = y, x = -2y$ 각각을 ① 식에 대입하면

i) $x = y$ 일 때 $x^2 - x^2 - 2 = 0, -2 = 0$ 불능

$$\text{ii) } x = -2y \text{ 일 때 } 4y^2 + 2y^2 - 2 = 0 \begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$x = \alpha, y = \beta \text{라 할 때, } \alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

14. 이차부등식 $(x+1)^2 \leq k(x^2-x+1)$ 이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립할 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(x+1)^2 \leq k(x^2-x+1)$
 $(k-1)x^2 - (k+2)x + k-1 \geq 0$
모든 x 에 대해 성립하려면,
 $k-1 > 0$, 판별식이 0보다 작거나 같다
 $D = (k+2)^2 - 4(k-1)(k-1) \leq 0$ 에서
 $\{(k+2) - 2(k-1)\}\{(k+2) + 2(k-1)\}$
 $= (-k+4)k \leq 0$
 $\therefore k(k-4) \geq 0, \quad k \leq 0 \text{ 또는 } k \geq 4$
 $\therefore k \geq 4 (\because k > 1) \quad \therefore \text{최솟값} : 4$

15. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx + 6 - k = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

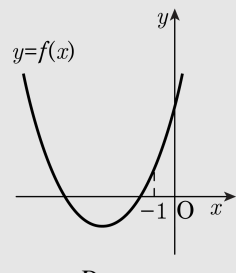
▶ 답: 개

▶ 정답 : 3개

해설

$f(x) = x^2 - 2kx + 6 - k$ 라 하면

방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4} = (-k)^2 - (6-k) > 0$ 에서

$$k^2 + k - 6 > 0, \quad (k + 3)(k - 2) > 0$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 2$$

(ii) $f(-1) = 1 + 2k + 6 - k > 0$ 에서 $k > -7$

(iii) $-\frac{-2k}{2} < -1$ 에서 $k < -1$

이상에서 $-7 < k < -3$

따라서 정수 k 는 $-6, -5, -4$ 의 3 개다.

16. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$ 을 만족하는 양수 x 에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$ 의 값은?

① 4 ② 2 ③ -1 ④ 5 ⑤ -5

해설

근의 공식을 이용하여 x 를 구하면

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$$

$$4x - \sqrt{41} = -1, \quad 2x^2 + x = 5$$

$$(\text{준식}) = (-1)^2 + (2x^2 + x - 1) = 1 + (5 - 1) = 5$$

17. 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 4 = 0$ 에서 한 근만이 양이기 위한 a 의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a \leq 0$

② $0 < a \leq 1$

③ $1 < a \leq 2$

④ $-2 < a \leq 2$

⑤ $-1 < a \leq 2$

해설

(i) $\alpha > 0, \beta < 0$ 일 때, $\alpha\beta = a^2 - 4 < 0$

$\therefore -2 < a < 2$

(ii) $\alpha > 0, \beta = 0$ 일 때,

$\alpha + \beta = a > 0, \alpha\beta = a^2 - 4 = 0$

$\therefore a = 2$

(i), (ii) 에서 $-2 < a \leq 2$

18. 이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 좌표가 -3 일 때, PQ 의 길이는? (단, k 는 상수)

① 5 ② $5\sqrt{2}$ ③ 7 ④ $7\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{5}$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와
직선 $y = x + k$ 가 두 점 P, Q 에서 만나므로
P, Q 의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 + 2x - 1 = x + k$
즉 $x^2 + x - 1 - k = 0 \cdots \textcircled{1}$ 의 두 실근과 같다.
점 P 의 x 좌표가 -3 이므로
 $\textcircled{1}$ 에 $x = -3$ 을 대입하면 $9 - 3 - 1 - k = 0$
 $\therefore k = 5$
 $k = 5$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x^2 + x - 6 = 0$
 $(x + 3)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$
따라서 점 Q 의 x 좌표는 2 이다.
두 점 P, Q 가 직선 $y = x + 5$ 위의 점이므로
 $P(-3, 2), Q(2, 7)$
 $\therefore \overline{PQ} = \sqrt{\{2 - (-3)\}^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{50}$
 $= 5\sqrt{2}$

19. 서로 다른 세 정수 a, b, c 에 대하여 삼차방정식 $(x-a)(x-b)(x-c) = 2$ 가 정수근을 가질 때, 이 근은?

- ① $\frac{a+b+c}{3}$ ② $\frac{a+b+c-1}{3}$ ③ $\frac{a+b+c-2}{3}$
④ $\frac{a+b+c-3}{3}$ ⑤ $\frac{a+b+c-4}{3}$

해설

$a < b < c$ 라 가정했을때, 정수근을 α 라고 하면, $(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c) = 2$ 를 만족하는 순서쌍은 $(1, -1, -2)$ 밖에 없다.

$$\Rightarrow \alpha - a = 1$$

$$\alpha - b = -1$$

$$\alpha - c = -2$$

세 식을 다 더하면,

$$3\alpha = a + b + c - 2, \alpha = \frac{a + b + c - 2}{3}$$

20. x 의 삼차방정식 $x^3 + (1 - 2a)x^2 + (a^2 - a + 1)x - a = 0$ 이 허근을 갖는다고 할 때, 정수 a 의 값들의 합은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$f(x) = x^3 + (1 - 2a)x^2 + (a^2 - a + 1)x - a$ 라 놓으면 $f(a) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x - a) \{x^2 + (1 - a)x + 1\} = 0$$

이것이 허근을 가지려면 $x^2 + (1 - a)x + 1 = 0$ 의 판별식 $D < 0$ 이어야하므로

$$D = (1 - a)^2 - 4 < 0 \quad a^2 - 2a - 3 < 0 \quad (a - 3)(a + 1) < 0$$

$$\therefore -1 < a < 3$$

$$\therefore \text{정수 } a = 0, 1, 2$$

$$\therefore 0 + 1 + 2 = 3$$