1. 다음 중 함수 $y = a\sqrt{bx}$ 의 그래프가 그려지는 사분면을 옳게 나타낸 것을 고르면? (단, $ab \neq 0$)

① $ab >\ 0$ 이면 제 3사분면

② $ab <\ 0$ 이면 제 4사분면

③ $a < 0, b > 0$ 이면 제 4사분면

④ $a > 0, b < 0$ 이면 제 1사분면

⑤ $a < 0, b < 0$ 이면 제 2사분면

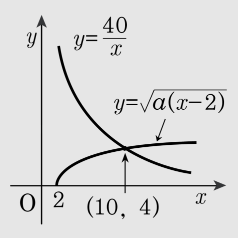
해설

㉠ $ab > 0 \Leftrightarrow (a > b$ 이고 $b > 0)$ 또는 $(a < 0$ 이고 $b < 0)$ 이므로
제 1사분면 또는 제 3사분면에 그래프가 그려진다.
㉡ $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0$ 이고 $b < 0)$ 또는 $(a < 0$ 이고 $b > 0\ )$이므로
제 2사분면 또는 제 4사분면에 그래프가 그려진다.
㉢ $a < 0, b > 0$ 이면
제 4사분면에 그래프가 그려진다.
㉣ $a > 0, b < 0$ 이면
제 2사분면에 그래프가 그려진다.
㉤ $a < 0, b < 0$ 이면
제 3사분면에 그래프가 그려진다.

2. 함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동 한 그래프와 곡선 $y = \dfrac{40}{x}(x > 0)$ 이 만나는 점의 x좌표가 10일 때, 상수 a의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설



함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를
x 축의 방향으로
2 만큼 평행이동시키면
$y = \sqrt{a(x-2)}$
이 그래프와 곡선 $y = \dfrac{40}{x}$ 이 만나는 점의
x좌표는 10이므로
y좌표는 $y = \dfrac{40}{10} = 4$
즉 교점의 좌표는 $(10, 4)$
이것을 $y = \sqrt{a(x-2)}$ 대입하면
$4 = \sqrt{a(10-2)} = \sqrt{8a}$
$\therefore a = 2$

3. 분수함수 $y = \dfrac{ax-1}{x+b}$ 의 점근선이 $x = -2$, $y = 3$ 일 때, 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 정의역은? (단, a, b 는 상수)

① $\{x \mid x \le -3\}$
② $\left\{x \mid x \le -\dfrac{2}{3}\right\}$
③ $\left\{x \mid x \ge -\dfrac{2}{3}\right\}$
④ $\left\{x \mid x \ge \dfrac{2}{3}\right\}$
⑤ $\{x \mid x \ge 3\}$

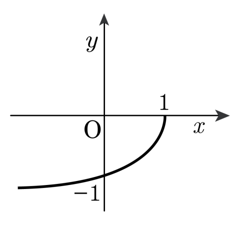
해설

$y = \dfrac{-ab-1}{x+b} + a$ 이므로

점근선은 $x = -b$, $y = a \therefore a = 3, b = 2$

$y = \sqrt{3x+2}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \ge -\dfrac{2}{3}\right\}$ 이다.

4. $y = -\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프의 개형이 아래 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값은?



① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y = -\sqrt{ax+b}+c = -\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$

점$(1, 0)$에서 시작이므로 $-\dfrac{b}{a} = 1,\ c = 0$

$\therefore b = -a,\ c = 0$

이것을 주어진 식에 대입하면 $y = -\sqrt{ax-a}$이고

주어진 그래프가 점$(0, -1)$를 지나므로

$-1 = -\sqrt{-a}$

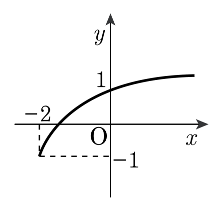
양변을 제곱을 하면 $1 = -a$

$\therefore\ a = -1$

따라서 $a = -1,\ b = 1,\ c = 0$이므로

$a+b+c = -1+1+0 = 0$

5. 함수 $y=a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 x축의 교점의 좌표는? (단, $a,\ b,\ c$ 는 상수)



① $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$　　② $\left(-\frac{4}{3},\ 0\right)$

③ $\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)$　　④ $(-\sqrt{2},\ 0)$

⑤ $(-\sqrt{3},\ 0)$

해설

함수 $y=a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프는
함수 $y=a\sqrt{x}$ 의 그래프를
x축의 방향으로 $-b$ 만큼, y축의 방향으로
c만큼 평행 이동시킨 것이므로
$b=2$, $c=-1$
$\therefore\ y=a\sqrt{x+b}+c=a\sqrt{x+2}-1$
한편, 이 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나므로
$1=a\sqrt{0+2}-1$
$\therefore\ a=\sqrt{2}$
따라서, 함수 $y=\sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$ 의 그래프와
x축의 교점의 x좌표를 구하면
$0=\sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$
$\sqrt{x+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$
$x+2=\frac{1}{2}$
$\therefore\ x=-\frac{3}{2}$

6. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x) = \sqrt{x-2}+2$, $g(x) = \frac{1}{x-2}+2$일 때 $(f \cdot g)(3)+(g \cdot f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$
$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$
$\therefore (f \cdot g)(3)+(g \cdot f)(3) = 6$

7. 무리함수 $y=-\sqrt{1-x}+2$의 역함수는?

① $y=(x-2)^2+1(x\le 2)$　② $y=(x-2)^2-1(x\le 2)$

③ $y=-(x-2)^2+1(x\le 2)$　④ $y=-(x-2)^2-1(x\le 2)$

⑤ $y=-(x+2)^2+1(x\le 2)$

해설

$y=-\sqrt{1-x}+2$에서 $1-x\ge 0$이므로 $x\le 1$

$y-2=-\sqrt{1-x}\le 0$이므로 $y\le 2$

$1-x=(y-2)^2,\ x=-(y-2)^2+1$

$x,\ y$를 바꾸면 구하는 역함수는

$\therefore y=-(x-2)^2+1(x\le 2)$

8. $y = \sqrt{2x+1}$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 하면, $g(-3)$ 의 값은?

① 4 ② $\sqrt{-5}$ ③ -5 ④ 없다 ⑤ -3

해설

역함수가 존재하려면 일대일 대응이 되어야 한다.
$y = \sqrt{2x+1}$ 의 역함수 $y = g(x)$ 의 정의역은
$y = \sqrt{2x+1}$ 의 치역이 되어야 하는데
이 함수의 치역은 음수가 될 수 없으므로
$g(-3)$ 의 값은 존재하지 않는다.

9. 곡선 $y=\sqrt{4x-8}$ 과 직선 $y=x+k$ 가 한 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

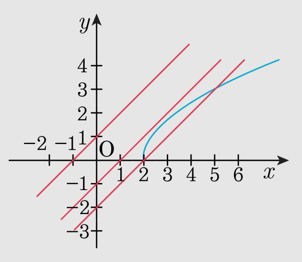
① $k=-2$ 또는 $k>1$　　② $k=-1$ 또는 $k<-2$

③ $k=1$ 또는 $k>2$　　④ $k=2$ 또는 $k<-1$

⑤ $k=-1$

해설

그래프에서 보듯이 한 점에서 만나는 경우는
접하는 경우이거나 $k<-2$ 인 경우이다.



접하는 경우는 $\sqrt{4x-8}=x+k$ 에서

$4x-8=x^2+2kx+k^2$

$x^2+2(k-2)x+k^2+8=0$

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2+8)=-4k-4=0$ 에서 $k=-1$

따라서 $k=-1$ 또는 $k<-2$

10. $y = \sqrt{2x}$의 그래프를 x축으로 m만큼 y축으로 n만큼 평행이동하면 $y = \sqrt{2x+6}-2$과 일치한다. $n-m$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$y = \sqrt{2x+6}-2 = \sqrt{2(x+3)}-2$이므로
$y = \sqrt{2x}$를 x축으로 -3만큼
y축으로 -2 만큼 평행이동하면 서로 일치한다.
따라서 $m=-3$, $n=-2$ 이므로
$\therefore n-m=1$

11. 좌표평면에서 무리함수 $y = -\sqrt{-x+2}+1$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면을 모두 구하면?

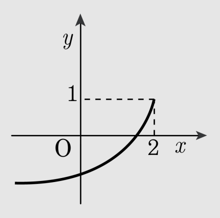
① 제 1사분면　　② 제 2사분면

③ 제 3사분면　　④ 제 1사분면, 제 2사분면

⑤ 제 3사분면, 제 4사분면

해설

무리함수의 그래프를 그려보면 아래와 같다.



따라서, 무리함수의 그래프가 지나지 않는 것은 제 2사분면이다.

12. $y = \sqrt{4x-12}+5$의 그래프는 함수 $y = 2\sqrt{x}$의 그래프를 x축으로 α, y축으로 β만큼 평행이동한 것이다. $\alpha+\beta$의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = 2\sqrt{x-3}+5$이므로,
이것은 $y = 2\sqrt{x}$의 그래프를
x축 방향으로 3만큼,
y축 방향으로 5만큼
평행이동한 그래프의 함수이다.
즉, $\alpha = 3$, $\beta = 5$
$\therefore\ \alpha+\beta = 8$

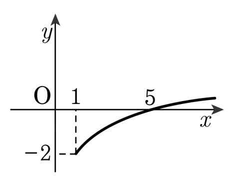
13. 무리함수 $y = \sqrt{a-x}-1$ 의 그래프가 원점을 지나고 정의역이 $\{x \mid x \le \alpha\}$, 치역이 $\{y \mid y \ge \beta\}$ 일 때, $a+\alpha+\beta$ 의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

주어진 무리함수의 그래프가
점 $(0,\ 0)$ 을 지나므로
$0 = \sqrt{a-1}$
$\therefore a = 1$
즉, 주어진 무리함수는 $y = \sqrt{1-x}-1$ 이고
$1-x \ge 0$ 에서 $x \le 1$ 이므로
정의역은 $\{x \mid x \le 1\}$
$\therefore \alpha = 1$
또, $y = \sqrt{1-x}-1$ 에서
$y+1 = \sqrt{1-x}-1$ 이므로 $y+1 \ge 0$
치역은 $\{y \mid y \ge -1\}$
$\therefore \beta = -1$
$\therefore a+\alpha+\beta = 1$

14. 다음 그림은 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그린 것이다. 이 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$ 의 값은?



① 1　　② −1　　③ 2

④ −2　　⑤ 3

해설

$y = \sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$의 그래프를 보면

점$(1, -2)$에서부터 시작하므로

$-\frac{b}{a} = 1,\ c = -2$

$\therefore -b = a\ ,\ c = -2$

$y = \sqrt{ax-a}-2$가 점$(5, 0)$을 지나므로

$0 = \sqrt{5a-a}-2,\ 2 = \sqrt{4a}$

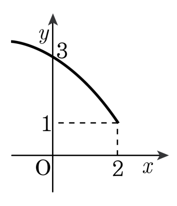
양변을 제곱하면 $4 = 4a$

$\therefore\ a = 1$

따라서 $a = 1, b = -1, c = -2$이므로

$a+b+c = 1-1-2 = -2$

15. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $a+b+c$의 값은?



① -1　　② 0　　③ 1

④ 2　　⑤ 3

해설

주어진 그림은 $y = \sqrt{ax}$의 그래프를
x축 방향으로 2, y축 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 $y-1 = \sqrt{a(x-2)}$
즉 $y = \sqrt{a(x-2)}+1$
그런데 이 그래프가 점 $(0,3)$을 지나므로
$3 = \sqrt{-2a}+1$
$\sqrt{-2a} = 2,\ -2a = 4$
$\therefore a = -2$
$\therefore y = \sqrt{-2x+4}+1$
$\therefore a+b+c = (-2)+4+1 = 3$

16. 정의역이 $\{x \mid x > 1\}$인 두 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{3(x-1)}$에 대하여 $(f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$(f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = a$라 하면

$(f \circ g)(a) = \dfrac{1}{4}$이고

$f(g(a)) = f(\sqrt{3(a-1)})$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1}$이므로

$\dfrac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} = \dfrac{1}{4}$

$\sqrt{3(a-1)}+1 = 4$,

$\sqrt{3(a-1)} = 3$

$3(a-1) = 9$, $a-1 = 3$, $a = 4$

$\therefore (f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = 4$

17. 무리함수 $y = \sqrt{x-a}+1$에 대하여 $f^{-1}(2)=3$일 때, 상수 a의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(3)=2$

$\therefore 2=\sqrt{3-a}+1$

$\therefore a=2$

18. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$ 이다.

② 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$ 이다.

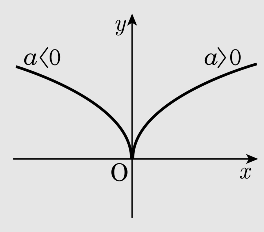
③ $y = -\sqrt{ax}$ 와 x 축에 대하여 대칭이다.

④ $y = \sqrt{-ax}$ 와 y 축에 대하여 대칭이다.

⑤ $a > 0$ 이면 원점과 제 1사분면을 지난다.

해설

$a > 0$ 일 때와 $a < 0$ 일 때의 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



그림에서 ②,③,④,⑤는 참임을 알 수있다.

그러나 $a > 0$ 일 때의 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$

$a < 0$ 일 때의 정의역은 $\{x \mid x \leq 0\}$ 이므로 ①은 틀린 것이다.

19. 무리함수 $y=-\sqrt{-2(x-2)}+3$가 지나는 모든 사분면은?

① 1 , 2 사분면 ② 1 , 4 사분면

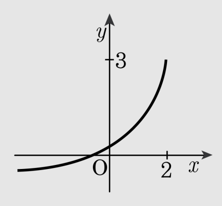
③ 1 , 2 , 3 사분면 ④ 2 , 3 , 4 사분면

⑤ 1 , 3 , 4 사분면

해설

꼭지점이 $(2,3)$ 이고 $(0,1)$ 을 지나므로

$\therefore$ 1, 2, 3 사분면을 지난다.



20. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$가
$f(x) = \sqrt{x-2}+2,\ g(x) = \dfrac{1}{x-2}+2$일 때, $(f\circ g)(3)+(g\circ f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(f\circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$
$(g\circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$
$\therefore (f\circ g)(3)+(g\circ f)(3) = 6$