

1. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고르면?

$\textcircled{\tiny{\Gamma}}$ $x^2 + 2x + 1 = 0$

$\textcircled{\tiny{\Delta}}$ $x^2 + 2x + 4 = 0$

$\textcircled{\tiny{\Xi}}$ $x^2 + 4x + 2 = 0$

- ① $\textcircled{\tiny{\Gamma}}$

② $\textcircled{\tiny{\Delta}}$

③ $\textcircled{\tiny{\Xi}}$

④ $\textcircled{\tiny{\Gamma}}, \textcircled{\tiny{\Xi}}$

⑤ $\textcircled{\tiny{\Delta}}, \textcircled{\tiny{\Xi}}$

해설

$\textcircled{\tiny{\Gamma}}$ $(x + 1)^2 = 0$: 중근

$\textcircled{\tiny{\Delta}}$ $a = 1, b' = 1, c = 4$
 $1^2 - 1 \cdot 4 = -3 < 0$: 허근

$\textcircled{\tiny{\Xi}}$ $a = 1, b' = 2, c = 2$
 $2^2 - 1 \cdot 2 = 2 > 0$: 서로 다른 두 실근 (○)

2. 이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$ 이 중근을 가질 때, 실수 k 의 값은?

① 1

② 3

③ 6

④ 9

⑤ 36

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1 \cdot k = 0$$

$$\therefore k = 9$$

3. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖은 것의 개수는?

㉠ $3x^2 - x - 1 = 0$	㉡ $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$
㉢ $2x^2 - \sqrt{3}x + 2 = 0$	㉣ $x^2 - x + 2 = 0$

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

- ㉠ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3(-1) = 13 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ㉡ $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$ 이므로 중근을 갖는다.
- ㉢ $D = (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -13 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.
- ㉣ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

4. 이차방정식 $x^2 + 4x + k = 0$ 이 허근을 가지도록 상수 k 의 값의 범위를 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k > 4$

해설

$$\frac{D}{4} = 2^2 - k < 0$$

$$\therefore k > 4$$

5. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고 판별식을 D 라고 할 때 $|\alpha - \beta|$ 는 다음 중 어느 것과 같은가?

① $\frac{\sqrt{D}}{a}$

② $\frac{-\sqrt{D}}{a}$

③ $\frac{\sqrt{D}}{|a|}$

④ $-\frac{\sqrt{D}}{|a|}$

⑤ $-\frac{D}{|a|}$

해설

근의 공식을 이용하여 풀면

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\therefore \alpha = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \beta = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ (단, } D = b^2 - 4ac \text{)}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\alpha - \beta| &= \left| \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right| \\ &= \left| \frac{-b + \sqrt{D} + b + \sqrt{D}}{2a} \right| \\ &= \left| \frac{2\sqrt{D}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{D}}{|a|} \end{aligned}$$

6. 이차방정식 $2x^2 - 4x - 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

- ① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

근과 계수와의 관계로부터

$$\alpha + \beta = 2 \quad \alpha\beta = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 7$$

7. 이차방정식 $x^2 - 10x + k = 0$ 의 두 근의 비가 2 : 3이 되도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

주어진 방정식의 한 근을 2α 라 하면

다른 한 근은 3α 가 되므로

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\alpha = 10 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2\alpha \times 3\alpha = k & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ②를 풀면

$$\alpha = 2, k = 6 \times 2^2 = 24$$

8. 한 근이 $1-i$ 인 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$ 일 때, 실수 $a+b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

한 근이 $1-i$ 이면 다른 한 근은 $1+i$ 이다.

두 근의 합 : 2,

두 근의 곱 : 2

$\therefore a=-2, b=2$

9. 이차방정식 $x^2 - 2x + a + 1 = 0$ 의 두 근이 서로 다른 부호의 실근을 가질 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a < -1$

해설

(두 근의 곱) = $a + 1 < 0 \quad \therefore a < -1$

10. 이차방정식 $x^2 + (k - 4)x + k - 1 = 0$ 이 중근을 가지도록 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
 $D = 0$ 일 때 중근을 가지므로
 $D = (k - 4)^2 - 4(k - 1) = k^2 - 12k + 20 = 0$ 에서
 $(k - 2)(k - 10) = 0$
따라서, $k = 2, k = 10$ 이므로 k 의 값은 12이다.

11. x 에 대한 이차방정식 $(k^2 - 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$ 이 허근을 가질 때, $k > m$ 이다. m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2 - 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$ 이

허근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = (k - 1)^2 - (k^2 - 1) < 0$$

$$(k^2 - 2k + 1) - (k^2 - 1) < 0$$

$$-2k + 2 < 0, k > 1$$

$$\therefore m = 1$$

12. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a-m-1)x + a^2 - b + m^2 = 0$ 의 근이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4} = (a - m - 1)^2 - (a^2 - b + m^2) = 0$$

m 의 값에 관계없이

$$2(-a + 1)m + (-2a + b + 1) = 0$$

이어야 하므로

$$2(-a + 1) = 0, \quad -2a + b + 1 = 0$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

13. 이차방정식 $x^2 + (a+1)x + a - 5 = 0$ 의 두 실근을 β, β^2 이라 할 때, $a + \beta + \beta^2$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

두 근의 합은 $\beta + \beta^2 = -a - 1$ 이므로
 $a + \beta + \beta^2 = a - a - 1 = -1$

14. 이차식 $2x^2 - 4x + 3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$$a=2, b'=-2, c=3$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

15. 0 이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 모두 고른 것은?

보 기

- $\textcircled{\tiny ㉠} \quad x^2 + ax + b = 0$
- $\textcircled{\tiny ㉡} \quad x^2 + bx + a = 0$
- $\textcircled{\tiny ㉢} \quad ax^2 + x + b = 0$
- $\textcircled{\tiny ㉣} \quad bx^2 + ax + b = 0$

- ① $\textcircled{\tiny ㉠}, \textcircled{\tiny ㉡}$
- ② $\textcircled{\tiny ㉠}, \textcircled{\tiny ㉢}$
- ③ $\textcircled{\tiny ㉡}, \textcircled{\tiny ㉣}$
- ④ $\textcircled{\tiny ㉡}, \textcircled{\tiny ㉢}$
- ⑤ $\textcircled{\tiny ㉢}, \textcircled{\tiny ㉣}$

해설

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

$\textcircled{\tiny ㉠} \quad x^2 + ax + b = 0, \quad D = a^2 - 4b$

$b \leq \frac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

$\textcircled{\tiny ㉡} \quad x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

$\textcircled{\tiny ㉢} \quad ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

$\textcircled{\tiny ㉣} \quad bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2, \quad a^2 \geq 4b^2$ 일 때만 실근 존재

16. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 &= (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 0 \\ \therefore x &= 2, y = 4 \\ \therefore x + y &= 6\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 &= 0 \text{이 실근을 가지므로} \\ D/4 &= 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0 \\ y^2 - 8y + 16 &\leq 0 \\ (y - 4)^2 &\leq 0, y = 4 \\ \text{준식에 대입하면 } x &= 2 \\ \text{따라서 } x + y &= 6\end{aligned}$$

17. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 4x - a + b = 0$ 이 중근을 가질 때 $x^2 - 2(a - 1)x + a^2 + 3b = 5a - 4$ 의 근을 판별하면?

- ① 중근
- ② 한 실근과 한 허근
- ③ 서로 다른 두 실근
- ④ 서로 같은 두 실근
- ⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2 - 4x - a + b = 0$ 이 중근을 가지려면

$$D' = 4 + a - b = 0$$

$$\therefore b = a + 4$$

$$x^2 - 2(a - 1)x + a^2 + 3b = 5a - 4$$

$$x^2 - 2(a - 1)x + a^2 - 2a + 16 = 0$$

$$D' = (a - 1)^2 - (a^2 - 2a + 16) = -15 < 0$$

$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

18. x 에 대한 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 다음 [보기]의 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

- $\textcirc� \quad ax^2 + 2bx + c = 0$

$\textcirc� \quad ax^2 + \frac{1}{2}bx + c = 0$
- $\textcirc� \quad cx^2 + bx + a = 0$

- ① $\textcirc�$

② $\textcirc�, \textcirc�$

③ $\textcirc�, \textcirc�$
- ④ $\textcirc�, \textcirc�$

⑤ $\textcirc�, \textcirc�, \textcirc�$

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로
 $D = b^2 - 4ac > 0 \cdots$
 $\textcirc� \quad ax^2 + 2bx + c = 0$ 의 판별식은
 $D = (2b)^2 - 4ac = 4b^2 - 4ac$
 $= 3b^2 + (b^2 - 4ac > 0)$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
 $\textcirc�$ [반례] $a = 1, b = 3, c = 2$ 일 때
 $x^2 + 3x + 2 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖지만
 $x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0$ 은 허근을 갖는다.
 $\textcirc� \quad cx^2 + bx + a = 0$ 의 판별식은
 $D = b^2 - 4ac > 0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

19. 이차방정식 $2x^2 - 4x - 3k = 0$ 이 허근을 갖고, 동시에 $x^2 + 5x - 2k = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 정수 k 의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2 - 4x - 3k = 0$ 이 허근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4} = 4 + 6k < 0$$

$$\therefore k < -\frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$x^2 + 5x - 2k = 0$ 이 실근을 가질 조건은

$$D = 25 + 8k \geq 0$$

$$\therefore k \geq -\frac{25}{8} \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } -\frac{25}{8} \leq k < -\frac{2}{3}$$

따라서, 정수 $k = -3, -2, -1$

$\therefore$ 정수 k 의 개수는 3개

20. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$ 이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D = 0$

$$D = (2m + a + b)^2 - 4(m^2 + ab) = 0$$

$$4m^2 + a^2 + b^2 + 4ma + 2ab + 4mb - 4m^2 - 4ab = 0$$

m 에 관해 식을 정리하면

$$(4a + 4b)m + (a^2 - 2ab + b^2) = 0$$

$$4a + 4b = 0, \quad a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$\therefore a + b = 0$$

21. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + b - 3 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b 의 값은?

- ① $a = 1, b = 2$ ② $a = 0, b = 3$ ③ $a = -1, b = 2$
④ $a = 0, b = 2$ ⑤ $a = -1, b = 3$

해설

중근을 가지려면, 판별식이 0이다.

$$D' = (k-a)^2 - (k^2 + b - 3) = 0$$

$$\Rightarrow -2ak + a^2 - b + 3 = 0$$

모든 k 에 대해 성립하려면

$$-2a = 0, \quad a^2 - b + 3 = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 3$$

22. x 에 관한 이차식 $a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)$ 에서 a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, 이 이차식이 x 에 관한 완전제곱식이 되는 것은 이 삼각형이 어떠한 삼각형일 때인가?

- ① a 를 빗변으로 하는 직각삼각형
- ② c 를 빗변으로 하는 직각삼각형
- ③ $a=b$ 인 이등변삼각형
- ④ $b=c$ 인 이등변삼각형
- ⑤ 정삼각형

해설

준식을 정리하면,
 $(a-c)x^2+2bx+a+c$
위의 식이 완전제곱식이 되려면
 $D=0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4}=b^2-(a-c)(a+c)=0,$
즉 $b^2-a^2+c^2=0$
 $\therefore a^2=b^2+c^2$
따라서, a 를 빗변으로 하는 직각삼각형

23. x 에 대한 다음 방정식의 두 근의 합은?

$$(\sqrt{3} + 1)x^2 + (\sqrt{3} + 1)x - 2\sqrt{3} = 0$$

- ① $-\sqrt{3}$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

해설

주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

$$((\sqrt{3} + 1)x - 2)(x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \text{ 또는 } x = -\sqrt{3}$$

$$\therefore x = \sqrt{3} - 1 \text{ 또는 } x = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \sqrt{3} - 1 + (-\sqrt{3}) = -1$$

24. 이차방정식 $x^2 - (k+1)x + k = 0$ 의 두 근의 비가 2 : 3일 때, 상수 k 의 값들의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

두 근을 2α , 3α 라 하면

$2\alpha + 3\alpha = k + 1$, $(2\alpha)(3\alpha) = k$ 이므로,

$5\alpha = k + 1$, $6\alpha^2 = k$

이 두 식에서 α 를 소거하면

$$6\left(\frac{k+1}{5}\right)^2 = k \text{에서 } 6k^2 - 13k + 6 = 0$$

$$(2k-3)(3k-2) = 0 \therefore k = \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$$

25. 이차방정식 $x^2 - mx + 4 = 0$ 의 두 근의 차가 2일 때, 실수 m 의 값은?

① $\pm 2\sqrt{2}$

② $\pm 2\sqrt{3}$

③ $\pm 2\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{6}$

⑤ $\pm 2\sqrt{7}$

해설

두 근을 α , $\alpha + 2$ 라고 하면,
근과 계수와의 관계에서
 $\alpha + (\alpha + 2) = m \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\alpha(\alpha + 2) = 4 \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 에서 $\alpha^2 + 2\alpha - 4 = 0$
 $\therefore \alpha = -1 \pm \sqrt{5}$
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $m = 2(-1 \pm \sqrt{5}) + 2 = \pm 2\sqrt{5}$

26. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 한다. $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ 을 두 근으로 하고, x^2 의 계수가 1인 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하시오.

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과계수와 관계로부터
 $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = -1$

2와 -1을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2 - (2 - 1)x + 2 \cdot (-1) = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + ax + b = 0$$

$$\therefore a = -1, b = -2$$

27. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 을 두

근으로 하는 이차방정식은? (단, $\alpha\beta \neq 0$)

- ① $ax^2 + bx + c = 0$
- ② $cx^2 + bx + a = 0$
- ③ $cx^2 - bx + a = 0$
- ④ $\frac{x^2}{a} + \frac{x}{b} + \frac{1}{c} = 0$
- ⑤ $abx^2 + bcx + ca = 0$

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 에서

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c},$$

$$\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{a}{c}$$

$$\therefore x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha\beta} = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0,$$

$$cx^2 + bx + a = 0$$

28. 이차방정식 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2 + 6x - 1 = 0$

② $x^2 - 6x - 1 = 0$

③ $x^2 + x - 6 = 0$

④ $x^2 - x + 6 = 0$

⑤ $x^2 - x - 6 = 0$

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = -2, \quad \alpha\beta = 3$$

-2, 3을 근으로 하는 이차방정식은

$$(x + 2)(x - 3) = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

29. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 2, 곱이 3일 때, 이차방정식 $f(2x + 1) = 0$ 의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0$ 이고 조건에서

$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$

$f(2x + 1) = 0$ 에서

$2x + 1 = \alpha$ 또는 $2x + 1 = \beta$

$\therefore x = \frac{\alpha - 1}{2}$ 또는 $x = \frac{\beta - 1}{2}$

따라서 $f(2x + 1) = 0$ 의 근은 $\frac{\alpha - 1}{2}, \frac{\beta - 1}{2}$

이때 두 근의 합 $\frac{\alpha - 1}{2} + \frac{\beta - 1}{2}$

$= \frac{\alpha + \beta - 2}{2} = \frac{2 - 2}{2} = 0$

30. 다음 중 인수분해를 바르게 한 것을 고르면?

① $x^2 + 4x + 1 = (x - 2 - \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3})$

② $x^2 - 2x + 5 = (x - 1 + 2i)(x + 1 + 2i)$

③ $x^2 + 4 = (x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

④ $2x^2 + 4x - 5 = \left(x - \frac{-2 + \sqrt{14}}{2}\right)\left(x - \frac{-2 - \sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2 - 6x + 1 = 3\left(x - \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)$

해설

근의 공식을 통해 나온 해를 바탕으로 인수분해 한다

① $x^2 + 4x + 1 = (x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3})$

② $x^2 - 2x + 5 = (x - 1 - \sqrt{6})(x - 1 + \sqrt{6})$

③ $x^2 + 4 = (x + 2i)(x - 2i)$

④ $2x^2 + 4x - 5$

$= 2\left(x - \frac{-2 + \sqrt{14}}{2}\right)\left(x - \frac{-2 - \sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2 - 6x + 1$

$= 3\left(x - \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)$

31. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 푸는데 A는 b 를 잘못 읽어 -4 와 7 을, B는 c 를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$ 를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a 와 c 를 바르게 읽었으므로

근과 계수와의 관계에서

$$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28, c = -28a$$

B는 a 와 b 를 바르게 읽었으므로

$$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6, b = 6a$$

따라서 원래의 이차방정식은

$$ax^2 + 6ax - 28a = 0$$

근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

32. 두 유리수 a, b 에 대하여 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 - \sqrt{3}$ 일 때, 이차방정식 $bx^2 - 5x + a = 0$ 의 두 근의 곱은?

① -4 ② -1 ③ $-\frac{1}{4}$ ④ 1 ⑤ 4

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 의 모든 계수가 유리수이고

한 근이 $2 - \sqrt{3}$ 이면

다른 한 근은 $2 + \sqrt{3}$ 이므로 근과 계수의 관계에서

$$-a = (2 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3}) = 4,$$

$$b = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$$

$$\therefore a = -4, b = 1$$

따라서 $bx^2 - 5x + a = 0$ 의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에서

$$\frac{a}{b} = \frac{-4}{1} = -4$$

33. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 에 두 근이 모두 음수가 되게 하는 실수 k 의 값의 범위를 정하면 ?

① $k \geq 3$

② $-\frac{3}{2} < k \leq -1$

③ $k < -\frac{3}{2}$

④ $\frac{3}{2} < k \leq 2$

⑤ $k < \frac{3}{2}$

해설

두 근이 모두 음수이면

① $D/4 \geq 0$ 에서 $k \leq -1, k \geq 3$

② 두 근의 합 $2k < 0, k < 0$

③ 두 근의 곱 $k > -\frac{3}{2}$

따라서 $-\frac{3}{2} < k \leq -1$

34. a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a + b)x^2 + 2cx + a - b$ 는 x 의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?
- ① 정삼각형

② $a = b$ 인 이등변삼각형

③ $b = c$ 인 이등변삼각형

④ a 가 빗변인 직각삼각형

⑤ c 가 빗변인 직각삼각형

해설

a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이이므로
 $a > 0, b > 0, c > 0$
따라서, $a + b > 0$ 이므로 준식은 이차식이다.
준식이 완전제곱식이 되려면
판별식 $D = 0$
 $\frac{D}{4} = c^2 - (a + b)(a - b) = 0$
정리하면, $c^2 - a^2 + b^2 = 0$
 $\therefore a^2 = b^2 + c^2$
따라서, a 가 빗변인 직각삼각형

35. α, β 를 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ (단, $ac \neq 0$)의 두 근이라 할 때,

다음 중 $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2, \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ 을 두 근으로 가지는 이차방정식은?

- ① $a^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + c^2 = 0$
- ② $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x - c^2 = 0$
- ③ $c^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + a^2 = 0$
- ④ $c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$
- ⑤ $c^2x^2 + (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

해설

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} \\ &= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = \frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{a^2}{c^2}$$

따라서, 구하는 이차방정식은

$$x^2 - \frac{(b^2 - 2ac)}{c^2}x + \frac{a^2}{c^2} = 0$$

$$\text{즉, } c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$$

36. 이차방정식 $f(2x+1) = 2$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = 4$ 가 성립한다. 이 때, $3f(x) - 2 = 4$ 의 두 근의 합은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면
 $f(2x+1) = a(2x+1)^2 + b(2x+1) + c = 2$
 $\therefore a(4x^2 + 4x + 1) + b(2x+1) + c - 2 = 0$
 $4ax^2 + 4ax + a + 2bx + b + c - 2 = 0$
 $4ax^2 + (4a + 2b)x + a + b + c - 2 = 0$
따라서 두 근의 합 $\alpha + \beta = \frac{-(4a + 2b)}{4a} = 4$
 $\therefore 4a + 2b = -16a, \quad 2b = -20a$ 이므로
 $b = -10a$
 $3f(x) - 2 = 4$ 이므로 $3f(x) = 6$
 $\therefore f(x) = 2 \quad \therefore ax^2 + bx + c - 2 = 0$ 에서
두 근의 합 $\alpha' + \beta' = -\frac{b}{a} = -\frac{-10a}{a} = 10$

37. 이차방정식 $4x^2 - ax + 2a = 0$ 의 두 근의 합과 곱을 두 근으로 하는 이차방정식이 $2x^2 - bx + 1 = 0$ 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a > 0$)

- ① -3
- ② -1
- ③ 1
- ④ 3
- ⑤ 5

해설

두 근이 α, β 일 때,
 $\alpha + \beta = \frac{a}{4}, \alpha\beta = \frac{a}{2}$
 $\frac{a}{4}, \frac{a}{2}$ 가 $2x^2 - bx + 1 = 0$ 의 두 근이므로
 $\frac{a}{4} \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8} = \frac{1}{2}$
 $a^2 = 4, a = 2 (a > 0)$
 $\frac{a}{4} + \frac{a}{2} = \frac{b}{2}, b = 3$
 $\therefore a + b = 3 + 2 = 5$

38. 이차방정식 $x^2 - 2x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ 를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2 - 4x + 1 = 0$

② $x^2 + 4x + 1 = 0$

③ $x^2 - 3x + 1 = 0$

④ $x^2 + 3x + 1 = 0$

⑤ $x^2 - 2x + 1 = 0$

해설

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -2$$

$$x^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)x + \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}\right)x + 1 = 0$$

$$x^2 - \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}x + 1 = 0$$

$$\frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{2^2 - 2 \cdot (-2)}{-2} = -4$$

$$\therefore x^2 + 4x + 1 = 0$$