1. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$d = \frac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

이때, $d = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

∴ 교점의 개수 : 0 개

2. 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 접하려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.

$\Rightarrow$ 중심 : $(0,\ 0)$ 직선 : $x + y - k = 0$

$$\frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ $k = \pm 2$

$\therefore$ $k = -2$ $(\because\ k < 0)$

3. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위는?

① $m < -2\sqrt{2},\ m > 2\sqrt{2}$
② $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$
③ $1 < m < 3$
④ $m < 1,\ m > 3$
⑤ $m = 1$

해설

원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심 $(0,\ 0)$ 에서
직선 $y = mx + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면
$d = \dfrac{|3|}{\sqrt{m^2+1}}$ 이다.
원과 직선이 두 점에서 만날 조건은 $d < r$ 을 만족시킨다.

$$\frac{|3|}{\sqrt{m^2+1}} < 1 \Rightarrow |3| < \sqrt{m^2+1}$$
$$\Rightarrow 9 < m^2 + 1$$
$$\Rightarrow m^2 > 8$$

$\therefore\ m < -2\sqrt{2}$ 또는 $m > 2\sqrt{2}$

4. 원 $x^2+y^2+10x-8y+16=0$ 에 의하여 잘려지는 x축 위의 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 축을 지나는 점은 $y=0$ 이므로
$x^2+10x+16=0 \Rightarrow (x+2)(x+8)=0$
$\Rightarrow x=-2, -8$
$\therefore x$ 축 위의 교점 : $(-8, 0), (-2, 0)$
$\therefore$ 구하는 선분의 길이 : 6

5. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답： ______ 개

▷ 정답： 0개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

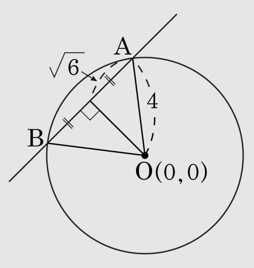
반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

6. 직선 $y = x + k$ 가 원 $x^2 + y^2 = 16$ 과 만나서 생기는 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 양수 k 의 값은?

① 2　② $2\sqrt{3}$　③ $2\sqrt{5}$　④ $3\sqrt{3}$　⑤ $3\sqrt{5}$

해설

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로,



$\overline{\mathrm{HA}} = \dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{6}$

이 때, $\triangle\mathrm{AHO}$ 가 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{OH}} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{10}$

따라서 원의 중심 $O(0,\ 0)$ 에서 직선 $y = x + k$

즉, $x - y + k = 0$ 에 이르는 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$\dfrac{|k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10},\ |k| = 2\sqrt{5}$

$\therefore\ k = 2\sqrt{5}\ (\because\ k > 0)$

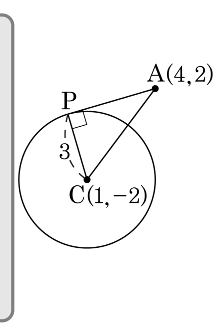
7. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 이 주어졌을 때, 점 A(4, 2) 에서 그은 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ 이다.
다음 그림에서 접선의 길이는
$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2}$
한편, $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고 $\overline{\mathrm{CP}} = 3$
$\therefore \overline{\mathrm{AP}} = 4$



8. 직선 $ax+(1-a)y-1=0$ 이 원 $x^2+y^2-x+y-1=0$ 의 넓이를 이등분할 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

직선 $ax+(1-a)y-1=0$ 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 한다.

$x^2+y^2-x+y-1=0$ 에서

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

직선의 방정식에 대입하면

$$\frac{1}{2}a+(1-a)\left(-\frac{1}{2}\right)-1=0$$

$$\therefore a=\frac{3}{2}$$

9. $x^2 + y^2 = 5$에 접하고, 기울기가 -2이며, 제 $1, 2, 4$사분면을 지나는 접선의 방정식을 구하면?

① $y = -2x - \sqrt{5}$ ② $y = -2x + 5$

③ $y = -2x - 3\sqrt{5}$ ④ $y = -2x - 5$

⑤ $y = -2x - 5\sqrt{5}$

해설

기울기가 -2인 직선의 방정식을 $y = -2x + c$라 하고, 직선과 원점간의 거리가 원의 반지름인 $\sqrt{5}$와 같으므로

$$\frac{|c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$\therefore\ c = \pm 5$

제 $1, 2, 4$사분면을 지나야 하므로

$\therefore\ c = 5 \quad \therefore y = -2x + 5$

10. 원 $x^2+y^2=4$ 에 접하고 기울기가 $-\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y=-\sqrt{2}x\pm 1$　② $y=-\sqrt{2}x\pm 5$　③ $y=-\sqrt{3}x\pm 4$
④ $y=-\sqrt{3}x\pm 9$　⑤ $y=-\sqrt{5}x\pm 6$

해설

구하는 접선의 방정식은

$y=\left(-\sqrt{3}\right)x\pm 2\sqrt{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2}$

$\therefore y=-\sqrt{3}x\pm 4$