

1. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$$

▶ 답: 개

▷ 정답: 0 개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{이때, } d = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

∴ 교점의 개수 : 0 개

2. 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 접하려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.

$$\Rightarrow \text{중심} : (0, 0) \quad \text{직선} : x + y - k = 0$$

$$\frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow k = \pm 2$$

$$\therefore k = -2 \quad (\because k < 0)$$

3. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위는?

① $m < -2\sqrt{2}, m > 2\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

③ $1 < m < 3$

④ $m < 1, m > 3$

⑤ $m = 1$

해설

원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심 $(0, 0)$ 에서
직선 $y = mx + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{m^2 + 1}} \text{ 이다.}$$

원과 직선이 두 점에서 만날 조건은 $d < r$ 을 만족시킨다.

$$\frac{|3|}{\sqrt{m^2 + 1}} < 1 \Rightarrow |3| < \sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 9 < m^2 + 1$$

$$\Rightarrow m^2 > 8$$

$$\therefore m < -2\sqrt{2} \text{ 또는 } m > 2\sqrt{2}$$

4. 원 $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$ 에 의하여 잘려지는 x 축 위의 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 축을 지나는 점은 $y = 0$ 이므로

$$x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 8) = 0$$

$$\Rightarrow x = -2, -8$$

$\therefore x$ 축 위의 교점 : $(-8, 0), (-2, 0)$

$\therefore$ 구하는 선분의 길이 : 6

5. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

6. 직선 $y = x + k$ 가 원 $x^2 + y^2 = 16$ 과 만나서 생기는 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 양수 k 의 값은?

① 2

② $2\sqrt{3}$

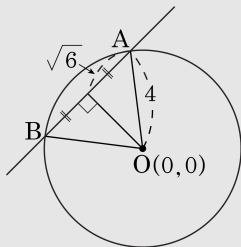
③ $2\sqrt{5}$

④ $3\sqrt{3}$

⑤ $3\sqrt{5}$

해설

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로,



$$\overline{HA} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \sqrt{6}$$

이 때, $\triangle AHO$ 가 직각삼각형이므로

$$\overline{OH} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{10}$$

따라서 원의 중심 $O(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + k$

즉, $x - y + k = 0$ 에 이르는 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}, |k| = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore k = 2\sqrt{5} (\because k > 0)$$

7. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 이 주어졌을 때, 점 A(4, 2) 에서 그은 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

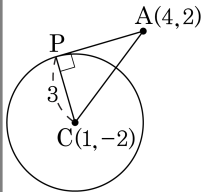
주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ 이다.

다음 그림에서 접선의 길이는

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2}$$

한편, $\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고 $\overline{CP} = 3$

$$\therefore \overline{AP} = 4$$



8. 직선 $ax + (1-a)y - 1 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ 의 넓이를 이등분할 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{5}{2}$

④ $\frac{7}{2}$

⑤ $\frac{9}{2}$

해설

직선 $ax + (1-a)y - 1 = 0$ 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 한다.

$x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ 에서

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

직선의 방정식에 대입하면

$$\frac{1}{2}a + (1-a)\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

9. $x^2 + y^2 = 5$ 에 접하고, 기울기가 -2 이며, 제 1, 2, 4사분면을 지나는 접선의 방정식을 구하면?

① $y = -2x - \sqrt{5}$

② $y = -2x + 5$

③ $y = -2x - 3\sqrt{5}$

④ $y = -2x - 5$

⑤ $y = -2x - 5\sqrt{5}$

해설

기울기가 -2 인 직선의 방정식을 $y = -2x + c$ 라 하고, 직선과 원점간의 거리가 원의 반지름인 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$$\frac{|c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\therefore c = \pm 5$$

제 1, 2, 4사분면을 지나야 하므로

$$\therefore c = 5 \quad \therefore y = -2x + 5$$

10. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가 $-\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y = -\sqrt{2}x \pm 1$

② $y = -\sqrt{2}x \pm 5$

③ $y = -\sqrt{3}x \pm 4$

④ $y = -\sqrt{3}x \pm 9$

⑤ $y = -\sqrt{5}x \pm 6$

해설

구하는 접선의 방정식은

$$y = (-\sqrt{3})x \pm 2\sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2}$$

$$\therefore y = -\sqrt{3}x \pm 4$$