

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 를 만족하는 실수 x, y, z 에 대하여 $x + 2y + 3z$ 의 최대값을 구하면?

① 14 ② 17 ③ $7\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해
 $(1^2 + 2^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + 2y + 3z)^2$
 $14 \cdot 2 \geq (x + 2y + 3z)^2$
 $-2\sqrt{7} \leq x + 2y + 3z \leq 2\sqrt{7}$
 $\therefore$ 구하는 최대값은 $2\sqrt{7}$

2. 제곱의 합이 일정한 두 실수 x, y 에 대하여 $2x + 3y$ 의 값이 최대일 때, x 와 y 사이의 관계는?

① $x = y$

② $2x = 3y$

③ $3x = 2y$

④ $x = y^2$

⑤ $x^2 = y^2$

해설

$$x^2 + y^2 = k \text{라 하면}$$

$$(x^2 + y^2)(2^2 + 3^2) \geq (2x + 3y)^2$$

($\because$ 코시-슈바르츠 부등식에 의하여)

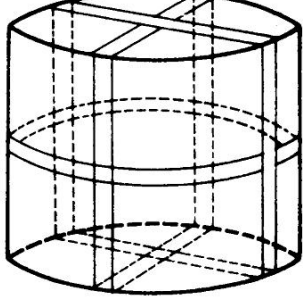
$$\therefore 13k \geq (2x + 3y)^2$$

$$\therefore -\sqrt{13k} \leq 2x + 3y \leq \sqrt{13k}$$

이 때, 등호는 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ 일 때 성립하므로

$$3x = 2y$$

3. 길이가 60 cm 인 장식용 테이프를 가지고 원기둥 모양의 선물을 장식하려 한다. 테이프를 3 개로 잘라 아래의 그림과 같이 선물의 표면에 붙여서 장식할 때, 다음은 이 테이프로 장식할 수 있는 선물의 최대 부피를 구하는 과정이다. 그런데 아래 풀이 과정은 잘못되었다. 어디에서 잘못이 일어났는가?



선물의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면
 $2 \times 2(2r + h) + 2\pi r = 60 \dots \textcircled{1}$
 한편, (산술평균) $\geq$ (기하평균) 이므로 $\dots \textcircled{2}$
 $8r + 4h + 2\pi r \geq 3^3 \sqrt{8r \cdot 4h \cdot 2\pi r} \dots \textcircled{3}$
 즉, $60 \geq 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \sqrt{\pi r^2 h}$
 따라서, $\pi r^2 h \leq 125 \dots \textcircled{4}$
 이상에 의해, 구하려는 최대 부피는 125 cm^3 이다. $\dots \textcircled{5}$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

$8r + 4h + 2\pi r$ $3^3 \sqrt{8r \cdot 4h \cdot 2\pi r}$ 에서
 등호는 $8r = 4h = 2\pi r$ 일 때 성립한다.
 그런데 $8 \neq 2\pi$ 이므로 최대 부피는 125 cm^3 가 아니다.

4. a, b 는 양의 상수이다. $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$, $x > 0$, $y > 0$ 일 때, $x + y$ 의 최솟값은?

① $2\sqrt{ab}$

② $4\sqrt{ab}$

③ $a + b + 2\sqrt{ab}$

④ $a + b + 4\sqrt{ab}$

⑤ $ab + 3\sqrt{ab}$

해설

(산술평균) $\geq$ (기하평균) 이므로

$$(x+y) \cdot 1 = (x+y) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \right)$$

$$= a + b + \frac{ay}{x} + \frac{bx}{y} \geq a + b + 2\sqrt{\frac{ay}{x} \cdot \frac{bx}{y}}$$

$$= a + b + 2\sqrt{ab}$$

5. 두 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 과 $x^2 - bx + a = 0$ 이 모두 두 개의 양의 근을 갖도록 두 실수 a, b 의 값을 정할 때, $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근을 α, β , $x^2 - bx + a = 0$ 의 근을 γ, σ 라 하자. 이 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

두 개의 양의 근을 가진다면,
 $\alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$ 를 만족한다.
 $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b, \gamma + \sigma = b,$
 $\gamma\sigma = a(a, b > 0)$
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{9(\gamma + \sigma)}{\gamma\sigma}$$
$$= \frac{a}{b} + \frac{9b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{9b}{a}} = 6$$
$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma} \geq 6$$

6. a, b 가 양의 상수이고, x, y 가 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 만족하면서 변할 때, $x+y$ 의 최댓값은?

① a^2

② b^2

③ $\sqrt{a^2 + b^2}$

④ $a^2 + b^2$

⑤ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

해설

코시-슈바르츠 부등식

$(a^2 + b^2) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \geq (x+y)^2$ 은 항상 성립하므로

$$a^2 + b^2 \geq (x+y)^2 \dots\dots ①$$

$$\therefore x+y \leq \sqrt{a^2 + b^2} \dots\dots ②$$

①의 등호가 성립할 조건은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 이고 } \frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} \dots\dots ③$$

또, ③의 등호는 $x+y \geq 0$ 일 때, 성립하므로

③을 풀면

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ 이고,}$$

$x+y$ 의 최댓값은 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 이다.

7. 1, 3, 5, 7, 9를 임의로 순서를 바꾸어 배열한 수열을 a, b, c, d, e 라고 할 때, $a + 3b + 5c + 7d + 9e$ 의 최솟값은?

① 83 ② 85 ③ 87 ④ 89 ⑤ 91

해설

$a + 3b + 5c + 7d + 9e$
 $= (10 - 9)a + (10 - 7)b + (10 - 5)c + (10 - 3)d + (10 - 1)e$
 $= 10(a + b + c + d + e) - (9a + 7b + 5c + 3d + e)$
 $= 10 \times 25 - (9a + 7b + 5c + 3d + e)$
여기서 코시-슈바르츠 부등식에 의하여
 $(9^2 + 7^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \geq (9a + 7b + 5c + 3d + e)^2$
 $(9a + 7b + 5c + 3d + e) \leq (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2)$ 이고
등호는 $\frac{a}{9} = \frac{b}{7} = \frac{c}{5} = \frac{d}{3} = \frac{e}{1}$ 일 때, 성립한다.
 $\therefore a + 3b + 5c + 7d + 9e \geq 10 \times 25 - (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2) = 250 - (165) = 85$
따라서, $a = 9, b = 7, c = 5, d = 3, e = 1$ 일 때,
준식은 최솟값 85를 갖는다.

해설

a, b, c, d, e 가 자연수이므로
 $a = 9, b = 7, c = 5, d = 3, e = 1$ 일 때
준식은 최소가 된다.