

1. 양수 x 에 대하여 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최솟값은?

① $2\sqrt{3}$

② $2\sqrt[3]{3}$

③ 6

④ 8

⑤ 10

2. 양수 x 에 대하여 $\frac{x^2+2x+2}{x}$ 는 $x = a$ 에서 최솟값 b 를 가질 때,
 $-2a + b + 1$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

3. 실수 x, y, z 에 대하여 $x - y + 4z = 3\sqrt{2}$ 일 때 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 3

4. 임의의 양의 실수 x, y 에 대하여 $A = \frac{x+y}{2}$, $G = \sqrt{xy}$, $H = \frac{2xy}{x+y}$ 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $G \geq A \geq H$ ② $A \geq H \geq G$ ③ $A \geq G \geq H$
④ $H \geq G \geq A$ ⑤ $H \geq A \geq G$

5. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단, $a \neq b$)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

② $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

③ $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

④ $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

⑤ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

6. 다음은 $a \geq 0, b \geq 0$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

$$\begin{aligned} & [\text{㉠}] - [\text{㉡}] \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \quad [\text{㉢}] \end{aligned}$$

따라서, $[\text{㉠}] \geq [\text{㉡}]$
한편, 등호는 $[\text{㉢}]$ 일 때 성립한다.

위의 증명에서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① ㉠ $a+b$ ㉡ $\sqrt{ab}$ ㉢ ≥ 0 ㉣ $a=0, b=0$

② ㉠ $\frac{a+b}{2}$ ㉡ $2\sqrt{ab}$ ㉢ ≤ 0 ㉣ $a=0, b=0$

③ ㉠ $\frac{a+b}{2}$ ㉡ $\sqrt{ab}$ ㉢ ≥ 0 ㉣ $a=b$

④ ㉠ $\sqrt{ab}$ ㉡ $a+b$ ㉢ ≥ 0 ㉣ $a=b$

⑤ ㉠ $2\sqrt{ab}$ ㉡ $\frac{a+b}{2}$ ㉢ ≤ 0 ㉣ $a=0, b=0$

7. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면
 $1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$
 이때, $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$
 (단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $ab+bc+ca \geq 3$ ([가])
 (단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $\therefore S \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$
 $= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$
 따라서 $\sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, \quad abc \leq 1$
 (단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다]에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

- ① $abc, a=b=c=1$ ② $\sqrt[3]{abc}, a=2$ 이고 $b=c$
 ③ $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=1$ ④ $abc, a=b$ 이고 $c=2$
 ⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=2$

8. 다음은 $a > 0, b > 0$ 일 때 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. ()

안에 알맞은 것은?

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\quad)^2}{2} \geq 0$$

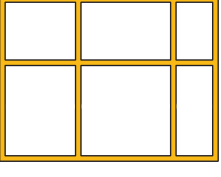
- ① $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

② $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

③ $a + b$
- ④ $a - b$

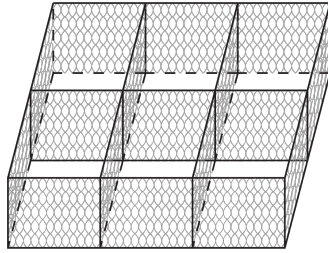
⑤ ab

9. 길이가 240인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로의 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



- ① (600, 40) ② (1200, 40) ③ (600, 30)
④ (1200, 30) ⑤ (450, 60)

10. 동원이 길이 152m인 철망을 가지고 다음 그림과 같이 여섯 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이가 최대가 될 때, 전체 직사각형의 가로 길이는?



- ① 19 ② $\frac{68}{3}$ ③ $\frac{70}{3}$ ④ 24 ⑤ $\frac{76}{3}$

11. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로의 길이를 합한 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

12. 부등식 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 24$ 를 만족시키는 실수 x, y, z 에 대하여 $x - 2y + 3z$ 의 최솟값을 구하시오.

 답: _____

13. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고 $a + b + c = 14$ 일 때, $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의
최댓값은?

① 12

② 13

③ 14

④ 15

⑤ 16

14. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족할 때, $x + 2y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

 답: _____

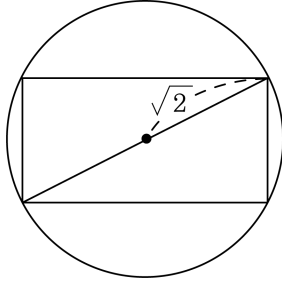
15. a, b, c 가 실수이고 $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ 일 때 $a + b + \sqrt{2}c$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하면?

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

16. $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 이고 $x + y + z = 10$ 일 때, $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z}$ 의 최댓값을 구하면?

- ① $\sqrt{35}$ ② $2\sqrt{35}$ ③ $3\sqrt{35}$ ④ $4\sqrt{35}$ ⑤ $5\sqrt{35}$

17. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

18. $x > 1$ 일 때, $2x + \frac{2}{x-1}$ 는 $x = a$ 일 때, 최솟값 b 를 갖는다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

 답: _____

19. $x > 2$ 일 때, $x + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 구하여라.

 답: _____

20. 이차방정식 $x^2 - 2x + k = 0$ (k 는 실수)이 허근을 가질 때, $f(k) = k + 1 + \frac{1}{k-1}$ 의 최솟값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

21. $a^2+b^2=2$, $x^2+y^2=2$ 일 때, $ax+by$ 의 최댓값과 $ab+xy$ 의 최댓값의 합은?(단, 문자는 모두 실수이다.)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

22. $x > 2$ 일 때, $2x - 3 + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 a , 그 때의 x 의 값을 b 라 할 때, $a + 2b$ 의 값을 구하면?

① $5 + \sqrt{2}$

② $5 + 2\sqrt{2}$

③ $5 + 3\sqrt{2}$

④ $5 + 4\sqrt{2}$

⑤ $5 + 6\sqrt{2}$

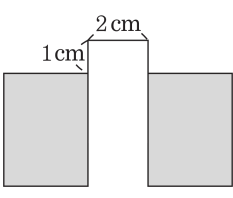
23. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(x + \frac{1}{4y}\right)\left(\frac{1}{x} + 8y\right)$ 의 최솟값을 다음과 같이 구하였다. 이 과정에서 최초로 잘못된 부분과 옳은 답을 구하면?

$$\left(x + \frac{1}{4y}\right)\left(\frac{1}{x} + 8y\right) \geq 2\sqrt{\frac{x}{4y}} \times 2\sqrt{\frac{8y}{x}} : (가)$$
$$\left(\because x + \frac{1}{4y} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{4y}}, : (나)\right)$$
$$\frac{1}{x} + 8y \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \times 8y} : (다)$$

따라서 최솟값은 $4\sqrt{2} : (라)$

- ① (가), $4\sqrt{2} + 3$ ② (나), $2 + 2\sqrt{2}$ ③ (다), $3 + 2\sqrt{2}$
- ④ (라), $4 + 3\sqrt{2}$ ⑤ (가), $3 + 2\sqrt{2}$

24. 폭이 200cm인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 단면이 아래 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면의 최대 넓이에 가장 가까운 값은?



- ① 1000 cm²
- ② 1200 cm²
- ③ 1600 cm²
- ④ 2000 cm²
- ⑤ 2400 cm²

26. 이차방정식 $x^2-4x+4a=0$ (a 는 실수) 이 허근을 가질 때, $a-1+\frac{9}{a-1}$ 의 최솟값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

27. 제곱의 합이 일정한 두 실수 a, b 에 대하여 $a + 2b$ 가 최대일 때, a 와 b 사이의 관계는?

① $b = 2a$

② $a = 2b$

③ $a = b$

④ $a^2 = b$

⑤ $b^2 = a$

28. 두 사람 갑, 을이 같은 거리를 여행하는데, 갑은 거리의 반을 a 의 속력으로, 나머지 거리를 b 의 속력으로 가고, 을은 총 걸린 시간 중 반을 a 의 속력으로, 나머지 시간을 b 의 속력으로 갔다. 각각의 평균속력을 A, B라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $A \leq B$

② $A \geq B$

③ $A = B$

④ $A < B$

⑤ $A > B$

29. 두 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 과 $x^2 - bx + a = 0$ 이 모두 두 개의 양의 근을 갖도록 두 실수 a, b 의 값을 정할 때, $x^2 - ax + b = 0$ 의 근을 α, β , $x^2 - bx + a = 0$ 의 근을 γ, δ 라 하자. 이 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}$ 의 최솟값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

30. a, b 가 양의 실수일 때, $a + 4b + \frac{1}{\sqrt{ab}}$ 은 최솟값 A 를 가지며, 이 때의 a 의 값은 B 이다. A, B 에 알맞은 수를 차례로 구하면?

① 6, 1

② $3 + \sqrt{2}$, 1

③ $3, \frac{1}{2}$

④ $4, \frac{1}{2}$

⑤ 4, 1

31. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, 절대부등식 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)을 이용할 때, $x > 0$ 이면 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최소값은?

- ① $2\sqrt{3}$ ② $2^3\sqrt{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

32. 세 양수 x, y, z 가 $x + y + z = 1$ 을 만족할 때,
 $\left(2 + \frac{1}{x}\right)\left(2 + \frac{1}{y}\right)\left(2 + \frac{1}{z}\right)$ 의 최소값을 구하여라.

 답: _____

33. 서로 다른 세 양수 p, q, r 에 대하여 $\frac{2}{p+q} + \frac{2}{q+r} + \frac{2}{r+p} \geq \frac{k}{p+q+r}$
이 성립할 때 k 의 최댓값은?

① 2

② 5

③ 9

④ 12

⑤ 18

34. x 의 삼차방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 27 = 0$ 이 세 개의 양의 실근을 갖는다.
이 때, 실수 a, b 에 대하여 a 의 최소값과 b 의 최소값의 차는?

① 6 ② 12 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

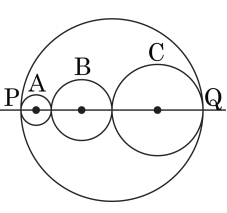
- 35.** $\angle A = 30^\circ$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{AC} = 3$ 인 삼각형 ABC 에서 변 BC 위를 움직이는 동점 P 가 있다. 점 P 에서 직선 AB , AC 에 내린 수선의 발을 각각 M , N 이라 할 때, $\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{25}{4}$ ② $\frac{25}{3}$ ③ $\frac{25}{2}$ ④ 25 ⑤ 35

36. 자연수 p, q 가 두 부등식 $p(4x^2 + 9y^2 + 16z^2) \geq (2x + 3y + 4z)^2$ 와 $q\left(x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3}\right) \geq (x + y + z)^2$ 을 만족할 때 pq 의 최솟값은?
(단, x, y, z 는 실수)

- ① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

37. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겹넓이의 총합이 40π 일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



- ① $4\sqrt{35}$
 ② $6\sqrt{35}$
 ③ $8\sqrt{35}$
- ④ $10\sqrt{35}$
 ⑤ $12\sqrt{35}$