

1. 양수 x 에 대하여 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최솟값은?

- ① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt[3]{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x > 0$ 이므로

$$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$$

(단, 등호는 $x = \frac{1}{2}$ 일 때 성립)

2. 양수 x 에 대하여 $\frac{x^2+2x+2}{x}$ 는 $x = a$ 에서 최솟값 b 를 가질 때, $-2a + b + 1$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x} = x + 2 + \frac{2}{x}$$

$$x + \frac{2}{x} + 2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

(단, 등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2} + 2$ 이므로 $b = 2\sqrt{2} + 2$

등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립하므로 $a = \sqrt{2}$

따라서 $-2a + b + 1 = -2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} + 2) + 1 = 3$

3. 실수 x, y, z 에 대하여 $x - y + 4z = 3\sqrt{2}$ 일 때 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

x, y, z 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $\{1 + (-1)^2 + 4^2\}(x^2 + y^2 + z^2)$
 $\geq (x - y + 4z)^2$
 $18(x^2 + y^2 + z^2) \geq (3\sqrt{2})^2$
 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$
따라서 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은 1이다.

4. 임의의 양의 실수 x, y 에 대하여 $A = \frac{x+y}{2}, G = \sqrt{xy}, H = \frac{2xy}{x+y}$ 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $G \geq A \geq H$
- ② $A \geq H \geq G$
- ③ $A \geq G \geq H$
- ④ $H \geq G \geq A$
- ⑤ $H \geq A \geq G$

해설

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$
 $\Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$
 $\therefore A \geq G \cdots \textcircled{1}$

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{xy}(x+y) \geq 2xy$
 $\Leftrightarrow \sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y}$
 $\therefore G \geq H \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여 $A \geq G \geq H$

5. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단, $a \neq b$)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

② $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

③ $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

④ $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

⑤ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

해설

$a > 0, b > 0$ 일 때, 산술·기하·조화·평균의 관계에서

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \quad (\text{등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

그런데 문제의 조건에서 $a \neq b$ 이므로

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

6. 다음은 $a \geq 0, b \geq 0$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{a+b}{2} \right] - \left[\sqrt{ab} \right] \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \end{aligned}$$

따라서, $\left[\frac{a+b}{2} \right] \geq \left[\sqrt{ab} \right]$
한편, 등호는 $\left[\frac{a+b}{2} \right] = \left[\sqrt{ab} \right]$ 일 때 성립한다.

위의 증명에서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ①

㉠

$a+b$

㉡

$\sqrt{ab}$

㉢

≥ 0

㉣

$a=0, b=0$
- ②

㉠

$\frac{a+b}{2}$

㉡

$2\sqrt{ab}$

㉢

≤ 0

㉣

$a=0, b=0$
- ③

㉠

$\frac{a+b}{2}$

㉡

$\sqrt{ab}$

㉢

≥ 0

㉣

$a=b$
- ④

㉠

$\sqrt{ab}$

㉡

$a+b$

㉢

≥ 0

㉣

$a=b$
- ⑤

㉠

$2\sqrt{ab}$

㉡

$\frac{a+b}{2}$

㉢

≤ 0

㉣

$a=0, b=0$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \\ \therefore \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \end{aligned}$$

한편, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.

7. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면
 $1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$
이때, $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $ab+bc+ca \geq 3([가])$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $\therefore S \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$
 $= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, abc \leq 1$
(단, 등호는 $([나])$ 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다]에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

- ① $abc, a=b=c=1$ ② $\sqrt[3]{abc}, a=2$ 이고 $b=c$
③ $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=1$ ④ $abc, a=b$ 이고 $c=2$
⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=2$

해설

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면
 $1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$
이 때 $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로
산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $ab+bc+ca \geq 3(\sqrt[3]{abc})^2$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $\therefore 8 \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$
 $= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, abc \leq 1$
(단, 등호는 $a=b=c=1$ 일 때 성립)

8. 다음은 $a > 0, b > 0$ 일 때 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. ()

안에 알맞은 것은?

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\quad)^2}{2} \geq 0$$

- ① $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

② $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

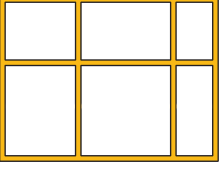
③ $a + b$
- ④ $a - b$

⑤ ab

해설

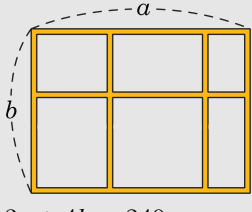
$$\begin{aligned} \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} &= \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

9. 길이가 240인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로와 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



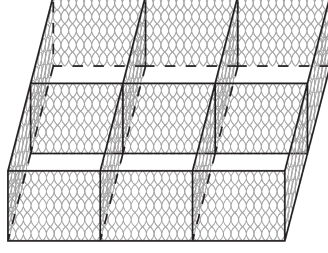
- ① (600, 40) ② (1200, 40) ③ (600, 30)
④ (1200, 30) ⑤ (450, 60)

해설



$$\begin{aligned} 3a + 4b &= 240 \\ 3a + 4b &\geq 2 \cdot \sqrt{3a \cdot 4b} \\ 240 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{12}} &\geq \sqrt{ab} (\because 3a + 4b = 240) \\ \therefore 1200 &\geq ab \\ \text{단, 등호는 } 3a &= 4b \text{ 일 때 성립하므로,} \\ 3a + 4b &= 6a = 240, \\ \therefore a &= 40 \end{aligned}$$

10. 동원이 길이 152m인 철망을 가지고 다음 그림과 같이 여섯 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이가 최대가 될 때, 전체 직사각형의 가로 길이는?



- ① 19 ② $\frac{68}{3}$ ③ $\frac{70}{3}$ ④ 24 ⑤ $\frac{76}{3}$

해설

가로의 길이를 x , 세로의 길이를 y 라 하면
 $152 = 3x + 4y \geq 2\sqrt{12xy}$ 이고
등호가 성립할 때, xy 가 최대가 된다.
 $3x = 4y$ 일 때, 등호가 성립하므로
 $6x = 152$
즉, $x = \frac{76}{3}$ 일 때, 전체 우리의 넓이가 최대가 된다.

11. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로의 길이를 합한 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

해설

밑변의 길이를 x , 높이를 y 라 하면

$$xy = 8 \cdots \textcircled{1}$$

피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 이다.

$x > 0, y > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{16} = 4$$

단, 등호는 $x^2 = y^2$ 즉 $x = y$ 일 때 성립한다.

$x = y$ 를 ①에 대입하면 $x^2 = 8$

따라서 $x = 2\sqrt{2}$ 이다.

$$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

12. 부등식 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 24$ 를 만족시키는 실수 x, y, z 에 대하여 $x - 2y + 3z$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$$(x - 2y + 3z)^2$$

$$= \{x + \sqrt{2}(-\sqrt{2}y) + \sqrt{3}(\sqrt{3}z)\}^2$$

$$\leq \{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\}$$

$$\{x^2 + (-\sqrt{2}y)^2 + (\sqrt{3}z)^2\}$$

$$= 6(x^2 + 2y^2 + 3z^2) \leq 144$$

$$\therefore -12 \leq x - 2y + 3z \leq 12$$

따라서, 구하는 최솟값은 -12 이다.

$$\text{(참고) 위의 부등식에서 } \frac{x}{1} = \frac{-\sqrt{2}y}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}z}{\sqrt{3}},$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 24$$

즉, $x = -y = \pm 2$ 일 때 등식이 성립한다.

13. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고 $a + b + c = 14$ 일 때, $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값은?

① 12

② 13

③ 14

④ 15

⑤ 16

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(1^2 + 2^2 + 3^2)(\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + \sqrt{c}^2)$
 $\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$
 $(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$
 $\leq 14(a + b + c) = 14^2$
 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로
 $\therefore 0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$
따라서, 구하는 최댓값은 14이다.

14. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족할 때, $x + 2y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$$(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$$

$x^2 + y^2 = 5$ 이므로

$$25 \geq (x + 2y)^2$$

$$\therefore -5 \leq x + 2y \leq 5$$

$$\therefore M = 5, m = -5$$

$$\therefore M - m = 5 - (-5) = 10$$

15. a, b, c 가 실수이고 $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ 일 때 $a + b + \sqrt{2}c$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하면?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$$\{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2\} (a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + \sqrt{2}c)^2$$

$$\therefore (a + b + \sqrt{2}c)^2 \leq 4^2$$

$$\therefore -4 \leq a + b + \sqrt{2}c \leq 4$$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 -4

$$\therefore M = 4, m = -4$$

$$M - m = 8$$

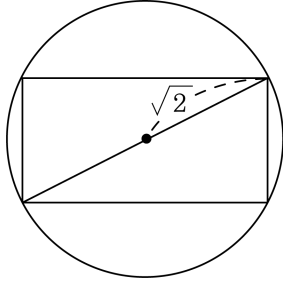
16. $x > 0, y > 0, z > 0$ 이고 $x + y + z = 10$ 일 때, $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z}$ 의 최댓값을 구하면?

① $\sqrt{35}$ ② $2\sqrt{35}$ ③ $3\sqrt{35}$ ④ $4\sqrt{35}$ ⑤ $5\sqrt{35}$

해설

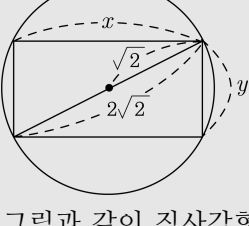
$\{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2\}(1 + 4 + 9)$
 $\geq (\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z})^2$ 이므로
 $(\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z})^2 \leq 140$
 $\therefore 0 < \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z} \leq \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$
($\because x > 0, y > 0, z > 0$)
 $\therefore \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z}$ 의 최댓값은
 $2\sqrt{35}$

17. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 $x, y(x > 0, y > 0)$ 라고 하면
 $x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$
직사각형의 둘레의 길이는 $2x + 2y$ 이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(2x + 2y)^2 \leq (2^2 + 2^2)(x^2 + y^2) = 8 \times 8 = 64$ (단, 등호는 $x = y$ 일 때 성립)
 $\therefore -8 \leq 2x + 2y \leq 8$
따라서 구하는 최댓값은 8이다.

18. $x > 1$ 일 때, $2x + \frac{2}{x-1}$ 는 $x = a$ 일 때, 최솟값 b 를 갖는다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned} 2x + \frac{2}{x-1} &= 2 \left(x + \frac{1}{x-1} \right) \\ x + \frac{1}{x-1} &= (x-1) + \frac{1}{x-1} + 1 \\ &\geq 2 \sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} + 1 \\ &= 2 + 1 = 3 \\ \therefore 2 \left(x + \frac{1}{x-1} \right) &\geq 3 \cdot 2 = 6 \\ \text{최솟값은 } x-1 &= \frac{1}{x-1} \text{ 일 때 6이다} \\ \therefore \text{즉, } x &= 2 \text{ 일 때 최솟값은 6이다.} \\ \therefore a + b &= 2 + 6 = 8 \end{aligned}$$

19. $x > 2$ 일 때, $x + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x > 2$ 에서 $x - 2 > 0$ 이므로
산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x-2} &= x - 2 + \frac{1}{x-2} + 2 \\&\geq 2\sqrt{(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 2 \\&= 2 + 2 = 4\end{aligned}$$

(단, 등호는 $x = 3$ 일 때 성립)

20. 이차방정식 $x^2 - 2x + k = 0$ (k 는 실수)이 허근을 가질 때, $f(k) = k + 1 + \frac{1}{k-1}$ 의 최솟값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\frac{D}{4} = 1 - k < 0 \text{ 이므로 } k - 1 > 0$$
$$f(k) = 2 + (k - 1) + \frac{1}{k - 1}$$
$$\geq 2 + 2\sqrt{(k - 1)\frac{1}{k - 1}} = 4$$

따라서 $f(k)$ 의 최솟값은 4이다.

21. $a^2 + b^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 2$ 일 때, $ax + by$ 의 최댓값과 $ab + xy$ 의 최댓값의 합은?(단, 문자는 모두 실수이다.)

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

i) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

$\therefore -2 \leq ax + by \leq 2$

ii) $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}, \quad 1 \geq |ab|$

$\therefore -1 \leq ab \leq 1$

$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2}, \quad 1 \geq |xy|$

$\therefore -1 \leq xy \leq 1$

$\therefore -2 \leq ab + xy \leq 2$

i), ii)에서, 최댓값의 합은 4

22. $x > 2$ 일 때, $2x - 3 + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 a , 그 때의 x 의 값을 b 라 할 때, $a + 2b$ 의 값을 구하면?

① $5 + \sqrt{2}$

② $5 + 2\sqrt{2}$

③ $5 + 3\sqrt{2}$

④ $5 + 4\sqrt{2}$

⑤ $5 + 6\sqrt{2}$

해설

산술평균, 기하평균의 관계에 따라

$$\begin{aligned} 2x - 3 + \frac{1}{x-2} &= 2(x-2) + \frac{1}{x-2} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{2(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2\sqrt{2} + 1$$

$$2(x-2) = \frac{1}{x-2} \text{ 에서}$$

$$2(x-2)^2 = 1, (x-2)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x > 2 \text{ 이므로 } b = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + 4 = 5 + 3\sqrt{2}$$

23. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(x + \frac{1}{4y}\right)\left(\frac{1}{x} + 8y\right)$ 의 최솟값을 다음과 같이 구하였다. 이 과정에서 최초로 잘못된 부분과 옳은 답을 구하면?

$$\left(x + \frac{1}{4y}\right)\left(\frac{1}{x} + 8y\right) \geq 2\sqrt{\frac{x}{4y}} \times 2\sqrt{\frac{8y}{x}} : (가)$$
$$\left(\because x + \frac{1}{4y} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{4y}}, : (나)\right)$$
$$\frac{1}{x} + 8y \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \times 8y} : (다)$$

따라서 최솟값은 $4\sqrt{2} : (라)$

- ① (가), $4\sqrt{2} + 3$ ② (나), $2 + 2\sqrt{2}$ ③ (다), $3 + 2\sqrt{2}$
- ④ (라), $4 + 3\sqrt{2}$ ⑤ (가), $3 + 2\sqrt{2}$

해설

$x > 0, y > 0$ 일 때

i) $x + \frac{1}{4y} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{4y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$

이 때, 등호는 $x = \frac{1}{4y}$, 즉 $xy = \frac{1}{4}$ 일 때 성립한다.

ii) $\frac{1}{x} + 8y \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot 8y} = 4\sqrt{\frac{2y}{x}}$

이 때, 등호는 $\frac{1}{x} = 8y$, 즉 $xy = \frac{1}{8}$ 일 때 성립한다.

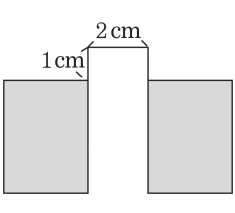
i), ii)에서 등호가 성립하는 조건이 다르므로 (가)와 같이 나타낼 수 없다.

iii) $\left(x + \frac{1}{4y}\right)\left(\frac{1}{x} + 8y\right)$

$$= 3 + \frac{1}{4xy} + 8xy \geq 3 + 2\sqrt{\frac{1}{4xy} \cdot 8xy}$$
$$= 3 + 2\sqrt{2}$$

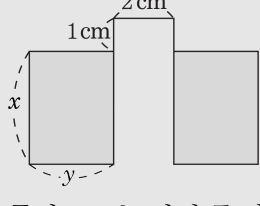
$\therefore$ 최솟값은 $3 + 2\sqrt{2}$

24. 폭이 200cm인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 단면이 아래 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면의 최대 넓이에 가장 가까운 값은?



- ① 1000 cm^2 ② 1200 cm^2 ③ 1600 cm^2
 ④ 2000 cm^2 ⑤ 2400 cm^2

해설



물이 흐르는 단면 중 한 쪽 직사각형의 가로를 $y\text{ cm}$, 세로를 $x\text{ cm}$ 라고 하면

$$4x + 2y + 2 + 1 \times 2 = 200 \text{ 에서}$$

$$4x + 2y = 196, x > 0, y > 0 \text{ 이므로}$$

(산술평균) $\geq$ (기하평균) 에서

$$\frac{4x + 2y}{2} \geq \sqrt{4x \cdot 2y} = 2\sqrt{2}\sqrt{xy}$$

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{196}{2}$$

$$\therefore xy \leq \frac{49^2}{2}, 2xy \leq 49^2, 2xy \leq 2401$$

따라서 단면의 최대 넓이는 $2xy = 2401$

25. $a > 1$ 일 때, $\frac{1}{a-1} + 4a - 3$ 의 최솟값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{1}{a-1} > 0$$

$$4(a-1) + 1 + \frac{1}{a-1} \geq 2 \cdot \sqrt{4(a-1) \cdot \frac{1}{(a-1)}} + 1$$

$$= 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

26. 이차방정식 $x^2 - 4x + 4a = 0$ (a 는 실수) 이 허근을 가질 때, $a - 1 + \frac{9}{a - 1}$ 의 최솟값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^2 - 4x + 4a = 0$ 이 허근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = 4 - 4a < 0$$

$$\therefore a > 1$$

$$\therefore (a - 1) + \frac{9}{(a - 1)} \geq 2\sqrt{(a - 1) \cdot \frac{9}{(a - 1)}} = 6$$

따라서 최솟값은 6

27. 제곱의 합이 일정한 두 실수 a, b 에 대하여 $a + 2b$ 가 최대일 때, a 와 b 사이의 관계는?

① $b = 2a$

② $a = 2b$

③ $a = b$

④ $a^2 = b$

⑤ $b^2 = a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a + 2b)^2 \leq (1^2 + 2^2)(a^2 + b^2)$$

$$\therefore (a + 2b)^2 \leq 5c$$

이 때, 등호는 $\frac{a}{1} = \frac{b}{2}$ 일 때 성립

$$\therefore b = 2a$$

28. 두 사람 갑, 을이 같은 거리를 여행하는데, 갑은 거리의 반을 a 의 속력으로, 나머지 거리를 b 의 속력으로 가고, 을은 총 걸린 시간 중 반을 a 의 속력으로, 나머지 시간을 b 의 속력으로 갔다. 각각의 평균속력을 A, B라 할 때, 다음 중 옳은 것은?
- ① $A \leq B$ ② $A \geq B$ ③ $A = B$
④ $A < B$ ⑤ $A > B$

해설

거리를 l 이라 하고, 갑이 걸린 시간을 t_1 이라 하면

$$t_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{b}$$

따라서 A의 평균속력은

$$A = \frac{l}{t_1} = \frac{l}{\frac{l}{2a} + \frac{l}{2b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

또, 을의 평균속력은 $B = \frac{1}{2}(a+b)$

그런데, $\frac{1}{2}(a+b) \geq \frac{2ab}{a+b}$ 이므로

$B \geq A$

29. 두 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 과 $x^2 - bx + a = 0$ 이 모두 두 개의 양의 근을 갖도록 두 실수 a, b 의 값을 정할 때, $x^2 - ax + b = 0$ 의 근을 α, β , $x^2 - bx + a = 0$ 의 근을 γ, δ 라 하자. 이 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}$ 의 최솟값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$x^2 - ax + b = 0 \text{에서 } \alpha + \beta = a, \alpha\beta = b$$
$$x^2 - bx + a = 0 \text{에서 } \gamma + \delta = b, \gamma\delta = a$$
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{\gamma + \delta}{\gamma\delta} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$
$$a > 0, b > 0 \text{이므로 } \frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0$$
$$\text{따라서 } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$$
$$\therefore \text{최솟값} = 2$$

30. a, b 가 양의 실수일 때, $a + 4b + \frac{1}{\sqrt{ab}}$ 은 최솟값 A 를 가지며, 이 때의 a 의 값은 B 이다. A, B 에 알맞은 수를 차례로 구하면?

- ① 6, 1 ② $3 + \sqrt{2}$, 1 ③ 3, $\frac{1}{2}$
 ④ 4, $\frac{1}{2}$ ⑤ 4, 1

해설

$$\begin{aligned} a + 4b + \frac{1}{\sqrt{ab}} &\geq 2\sqrt{a \cdot 4b} + \frac{1}{\sqrt{ab}} \quad (\text{등호는 } a = 4b \text{ 일 때}) \\ &\geq 2\sqrt{4\sqrt{ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}}} \quad (\text{등호는 } 4\sqrt{ab} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ 일 때}) = 4 \\ \text{또, 등호는 } a = 4b \text{ 이고 } 4\sqrt{ab} &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ 일 때 성립하므로 } ab = \\ \frac{1}{4}a^2 &= \frac{1}{4} \\ \therefore a = 1, b &= \frac{1}{4} \\ \text{따라서, } a = 1, b = \frac{1}{4} \text{ 일 때 } a + 4b + \frac{1}{\sqrt{ab}} &= 4 \end{aligned}$$

31. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, 절대부등식 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)을 이용할 때, $x > 0$ 이면 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최소값은?

- ① $2\sqrt{3}$ ② $2^3\sqrt{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} 8x^2 + \frac{2}{x} &= 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq \sqrt[3]{8x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} \\ &= 3\sqrt[3]{8} = 6 \end{aligned}$$

32. 세 양수 x, y, z 가 $x + y + z = 1$ 을 만족할 때,
 $\left(2 + \frac{1}{x}\right)\left(2 + \frac{1}{y}\right)\left(2 + \frac{1}{z}\right)$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 125

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 8 + 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\ &\quad + 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) + \frac{1}{xyz} \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} &= \frac{x+y+z}{xyz} = \frac{1}{xyz} \text{ 이므로} \\ (\text{준식}) &= 8 + 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{3}{xyz} \\ x+y+z &= 1 \text{ 이므로} \\ \frac{1}{3} &= \frac{x+y+z}{3} \geq 3\sqrt{xyz} \\ \left(\text{등호는 } x=y=z=\frac{1}{3} \text{ 일 때 성립}\right) \\ \therefore xyz &\leq \frac{1}{27} \quad \therefore \frac{1}{xyz} \geq 27 \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &\geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 9 \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{ 에서 (준식)} &\geq 8 + 36 + 81 = 125\end{aligned}$$

33. 서로 다른 세 양수 p, q, r 에 대하여 $\frac{2}{p+q} + \frac{2}{q+r} + \frac{2}{r+p} \geq \frac{k}{p+q+r}$ 이 성립할 때 k 의 최댓값은?

- ① 2
- ② 5
- ③ 9
- ④ 12
- ⑤ 18

해설

주어진 부등식의 양 변에 $(p+q) + (q+r) + (r+p)$ 를 곱하면

$$6 + 2 \left\{ \left(\frac{q+r}{p+q} + \frac{r+p}{p+q} \right) + \left(\frac{p+q}{q+r} + \frac{r+p}{q+r} \right) + \left(\frac{p+q}{r+p} + \frac{q+r}{r+p} \right) \right\} \geq 2k$$

$$3 + \left\{ \left(\frac{q+r}{p+q} + \frac{r+p}{p+q} \right) + \left(\frac{p+q}{q+r} + \frac{r+p}{q+r} \right) + \left(\frac{p+q}{r+p} + \frac{q+r}{r+p} \right) \right\} \geq k$$

좌변에서 p, q, r 이 양수이므로

산술평균, 기하평균에 의하여

(좌변)

$$\begin{aligned} &\geq 3 + 2 \sqrt{\frac{q+r}{p+q} \cdot \frac{p+q}{q+r}} + 2 \sqrt{\frac{r+p}{q+r} \cdot \frac{q+r}{r+p}} \\ &\quad + 2 \sqrt{\frac{r+p}{p+q} \cdot \frac{p+q}{r+p}} \\ &= 3 + 2 + 2 + 2 = 9 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $p=q=r$ 일 때 성립)

따라서 k 의 최댓값은 9이다.

34. x 의 삼차방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 27 = 0$ 이 세 개의 양의 실근을 갖는다.
이 때, 실수 a, b 에 대하여 a 의 최소값과 b 의 최소값의 차는?

① 6 ② 12 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

세 근을 α, β, γ 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = a,$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b, \alpha\beta\gamma = 27$$

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$a = \alpha + \beta + \gamma \geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$$

$$= 3\sqrt[3]{27} = 9$$

$$b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \geq 3\sqrt{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = 27$$

$$\therefore 27 - 9 = 18$$

35. $\angle A = 30^\circ$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{AC} = 3$ 인 삼각형 ABC에서 변 BC위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P에서 직선 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 할 때, $\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{25}{4}$ ② $\frac{25}{3}$ ③ $\frac{25}{2}$ ④ 25 ⑤ 35

해설

$\overline{PM} = x$, $\overline{PN} = y$ 라 하면

$\triangle APB + \triangle APC = \triangle ABC$ 이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot y = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ$$

$\therefore 2x + 3y = 3$

$x > 0, y > 0$ 이므로

$$\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y}\right) \cdot (2x + 3y) = 13 + 6 \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)$$

$$\geq 13 + 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}}$$

$\therefore \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y}\right) \times 3 \geq 13 + 12 = 25$

$\therefore \frac{2}{x} + \frac{3}{y} \geq \frac{25}{3}$

$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{PM}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$ 의 최솟값은 $\frac{25}{3}$

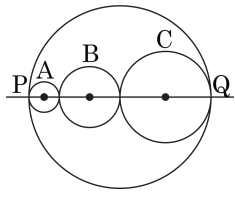
36. 자연수 p, q 가 두 부등식 $p(4x^2 + 9y^2 + 16z^2) \geq (2x + 3y + 4z)^2$ 와 $q\left(x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3}\right) \geq (x + y + z)^2$ 을 만족할 때 pq 의 최솟값은?
(단, x, y, z 는 실수)

- ① 6
- ② 9
- ③ 12
- ④ 15
- ⑤ 18

해설

x, y, z 는 실수이므로
코시-슈바르츠 부등식에 의하여
(i) $(1^2 + 1^2 + 1^2)(2x)^2 + (3y)^2 + (4z)^2\}$
 $\geq (2x + 3y + 4z)^2$
 $3(4x^2 + 9y^2 + 16z^2) \geq (2x + 3y + 4z)^2$
(단, 등호는 $2x = 3y = 4z$ 일 때 성립)
따라서 $p(4x^2 + 9y^2 + 16z^2) \geq (2x + 3y + 4z)^2$ 이 성립하려면
 $p \geq 3$
(ii) $\{1 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\}$
 $\left\{x^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2\right\} \geq (x + y + z)^2$
 $6\left(x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3}\right) \geq (x + y + z)^2$
(단, 등호는 $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ 일 때 성립)
따라서 $q(x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3}) \geq (x + y + z)^2$ 이 성립하려면 $q \geq 6$
(i), (ii)에서 pq 의 최솟값은 18이다.

37. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겹넓이의 총합이 40π 일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



- ① $4\sqrt{35}$ ② $6\sqrt{35}$ ③ $8\sqrt{35}$
 ④ $10\sqrt{35}$ ⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z 라 하면
 구의 겹넓이는
 $S_1 = 4\pi x^2, S_2 = 4\pi y^2, S_3 = 4\pi z^2$
 $4\pi(x^2 + y^2 + z^2) = 40\pi$
 $\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 10$
 $(x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 4^2 + 6^2) \geq (2x + 4y + 6z)^2$
 $10 \cdot 56 \geq (2x + 4y + 6z)^2$
 $4\sqrt{35} \geq 2x + 4y + 6z$
 PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x + 4y + 6z)$ 이므로 $8\sqrt{35}$