

1. 두 양수 a, b 에 대하여 다음 설명 중 틀린 것은?

① a, b 의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$ 이다.

② \sqrt{ab} 는 a, b 의 기하평균이다.

③ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 은 절대부등식이다.

④ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$ 이다.

⑤ $a + \frac{1}{a} \geq 2$ 는 항상 성립한다.

2. x 가 양의 실수 일 때, $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답: _____

▶ 답: _____

3. $x > 3$ 일 때 $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$ 의 최솟값은?

① 3

② 5

③ 12

④ 15

⑤ 17

4. 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 이 성립할 때, $x+y$ 의 최댓값은?

- ① $\sqrt{7}$ ② 3 ③ $\sqrt{13}$ ④ 5 ⑤ 12

5. a, b, x, y 가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$ 일 때 $ax + by$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

- ① -16 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 16

6. 실수 a, b, x, y 에 대하여 $a^2 + b^2 = 5, x^2 + y^2 = 3$ 일 때 다음 중 $ax + by$ 의 값이 될 수 없는 것은?

- ① -1 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

7. 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 일 때 $x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 은?

① $M = 3, m = 0$

② $M = 3, m = -3$

③ $M = 6, m = 0$

④ $M = 6, m = -6$

⑤ $M = 6, m = -12$

8. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고, $a + b + c = 14$ 일 때, $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값을 구하여라.

 답: _____

9. $a \geq 0, b \geq 0$ 일 때, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 다음과 같은 과정으로 증명을 하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

증명

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(a-b)^2}{2}$ 이므로
 부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 이 성립함을 알 수 있다.
 이 때, 등호는 (다)일 때 성립한다.

- ① $\geq, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a = b$ ② $\geq, a - b, a = b = 0$
 ③ $>, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a = b$ ④ $>, a - b, a = b$
 ⑤ $\geq, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a \geq b$

10. 한 자리의 자연수 l, m, n 에 대하여 $\{l, m, n\} = \{p, q, r\}$ 가 성립한다고 한다. 이 때, $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r}$ 의 최소값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

11. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

 답: _____

12. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c}$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답: _____

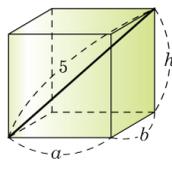
13. 길이가 16m인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

- ① 8m^2 ② 16m^2 ③ 25m^2 ④ 36m^2 ⑤ 64m^2

14. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답: _____

15. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h 이고, 대각선의 길이가 5인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



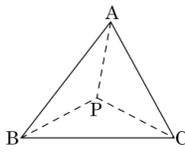
- ① $5\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $20\sqrt{3}$
 ④ $25\sqrt{5}$ ⑤ $24\sqrt{6}$

16. 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각 x_1, x_2, x_3 라 할 때, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{288}{25}$ ② $\frac{144}{15}$ ③ $\frac{144}{25}$ ④ $\frac{288}{25}$ ⑤ $\frac{576}{25}$

17. 넓이가 a 인 삼각형 ABC의 내부에 한 점 P에 대하여 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ 의 넓이를 각각 S_1 , S_2 , S_3 이라 할 때 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{a^2}{3}$ ② a^2 ③ $\sqrt{3}a^2$
④ $3a^2$ ⑤ $3\sqrt{3}a^2$



18. 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$ 의 최댓값은?

① 1

② 2

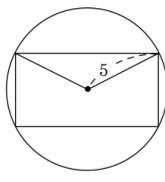
③ 3

④ 4

⑤ 5

19. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $10\sqrt{2}$
 ④ $20\sqrt{2}$ ⑤ $100\sqrt{2}$



21. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수 a, b, H 에 대하여
 적당한 실수 r 가 존재하여
 $a = H + \frac{a}{r}, H = b + \frac{b}{r} \dots (A)$ 가 성립한다고 하자.
 그러면 $a \neq b$ 이고 $\frac{a-H}{a} = (가) \dots (B)$ 이므로
 $H = (나)$ 이다.
 역으로, $a \neq b$ 인 양수 a, b 에 대하여
 $H = (나)$ 이면,
 식 (B) 가 성립하고 $\frac{a-H}{a} \neq 0$ 이다.
 (B) 에서 $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$ 이라 놓으면
 식 (A) 가 성립한다. 따라서 양수 a, b, H 에 대하여 적당한 실수
 r 이 존재하여
 식 (A) 가 성립하기 위한 $(가)$ 조건은
 $a \neq b$ 이고 $H = (나)$ 이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

- | | |
|--|---|
| ① $\frac{H-b}{b}, \frac{2ab}{a+b}$, 필요충분
③ $\frac{H-b}{b}, \frac{2ab}{a+b}$, 충분
⑤ $\frac{b-H}{b}, \frac{ab}{a+b}$, 충분 | ② $\frac{H-b}{b}, \frac{ab}{a+b}$, 필요충분
④ $\frac{b-H}{b}, \frac{2ab}{a+b}$, 필요 |
|--|---|

22. $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 네모 속에서 옳은 것은 모두 몇 개인가?

- | |
|---|
| I. $1 + a > \sqrt{1 + 2a}$ |
| II. $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ |
| III. $a + \frac{1}{a} \geq 2$ |
| IV. $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$ |
| V. $(a+b) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} \right) \geq 4$ |
| VI. $(2a+b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 25$ |

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

23. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때
 $\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답: _____

24. $x > -1$ 일 때 $x + \frac{1}{x+1}$ 의 최솟값을 m , 그 때의 x 의 값을 k 라 할 때 $m+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답: _____

25. 다음은 양수 x, y, z 가 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 을 만족할 때, $P = \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}$ 의 최솟값을 구하는 과정이다.

$$\begin{aligned}
 P^2 &= \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \right) + \\
 &\quad \frac{1}{2} \left(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \right) + 2(x^2 + y^2 + z^2) \\
 \therefore P^2 &\geq (\text{가}) \\
 \text{따라서, } P \text{의 최솟값은 } (\text{나}) \text{이고,} \\
 \text{등호는 } x = y = z = (\text{다}) \text{일 때, 성립한다.}
 \end{aligned}$$

위

의 과정에서 (가)~(다)에 각각 알맞은 것은?

- ① $2, \sqrt{2}, \frac{1}{3}$ ② $9, 3, \frac{1}{\sqrt{3}}$ ③ $3, \sqrt{3}, \frac{1}{3}$
 ④ $3, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑤ $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

26. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, $\triangle OBC$ 의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

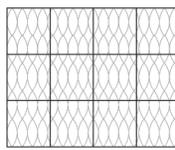
- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ $2\sqrt{6}$

27. 세 양수 a, b, c 가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

- I. $a + b + c \geq 3$
- II. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$
- III. $ab + bc + ca \geq 3$
- IV. $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 8$

- ① I, II ② I, III ③ III, IV
- ④ I, III, IV ⑤ I, II, III, IV

28. 어떤 농부가 길이 120m인 철망을 가지고 아래 그림과 같이 열두 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 최대넓이를 구하여라.



- ① 120m^2 ② 180m^2 ③ 240m^2
④ 300m^2 ⑤ 360m^2

29. 반지름이 r (cm)인 원에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면?

① $2r$ (cm^2)

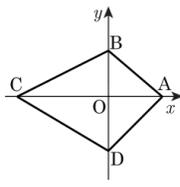
② r^2 (cm^2)

③ $2r^2$ (cm^2)

④ $\sqrt{2}r^2$ (cm^2)

⑤ $\frac{r^2}{2}$ (cm^2)

30. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. $\triangle OAB$ 와 $\triangle OCD$ 의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



- ① 37 ② 40 ③ 43 ④ 46 ⑤ 49

31. 좌표평면 위의 점 A(1, 2)를 지나는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, $\triangle OBC$ 의 최소 넓이는?

- ① 3 ② 3.5 ③ 4 ④ 4.5 ⑤ 5

32. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은 x 분씩 늘어나며 y 명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한 xy 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답: _____

33. 다음은 a, b, c, d, x, y, z, w 가 실수일 때, 부등식 $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \geq (ax + by + cz + dw)^2$ 이 성립함을 증명하는 과정의 일부이다. ㉠, ㉡ 부분에 들어갈 기호가 순서대로 적당한 것은?

[증명] 모든 실수 t 에 대하여 다음 부등식이 성립한다.
 $(at - x)^2 + (bt - y)^2 + (ct - z)^2 + (dt - w)^2$ ㉠ 0
 이것을 t 에 관하여 정리하면
 $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)t^2 - 2(ax + by + cz + dw)t$
 $+ (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$ ㉡ 0
 따라서 항상 성립하기 위해서는
 $(ax + by + cz + dw)^2 -$
 $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$ ㉢ 0.....(이하 생략)

- ① $>, <$ ② $\geq, <$ ③ $\leq, >$ ④ \leq, \geq ⑤ \geq, \leq

34. $x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6$ 을 만족하는 실수 x, y, z 에 대하여 x 가 취할 수 있는 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

35. 다음 부등식 중 옳은 것을 고르면? (단, a, b 는 0이 아닌 실수)

① $\sqrt{2(a^2 + b^2)} \leq |a| + |b| \leq \frac{4|a||b|}{|a| + |b|}$

② $\sqrt{2(a^2 + b^2)} \leq \frac{4|a||b|}{|a| + |b|} \leq |a| + |b|$

③ $|a| + |b| \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} \leq \frac{4|a||b|}{|a| + |b|}$

④ $\frac{4|a||b|}{|a| + |b|} \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} \leq |a| + |b|$

⑤ $\frac{4|a||b|}{|a| + |b|} \leq |a| + |b| \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$

36. 삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c 라 하고 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ 라 할 때,

$(s-a)(s-b)(s-c) \leq kabc$ 를 만족시키는 상수 k 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{7}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{12}$

37. 임의의 양수 x, y 에 대하여 부등식 $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{k(x+y)}$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위를 구하면?

① $k \geq 1$

② $k \geq 2$

③ $k \leq -1$

④ $k \leq -2$

⑤ $k \leq \frac{2}{3}$

38. 임의의 양수 a, b 에 대하여 부등식 $(a+b)^3 \leq k(a^3+b^3)$ 이 항상 성립할 때, 실수 k 의 최솟값을 구하시오.

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 6

39. x, y, z 가 양의 실수일 때 $(x+y+z)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z}\right)$ 의 최솟값을 구하라.

▶ 답: _____

40. 양수 a, b 에 대하여 다음 식 $a^2 + b + \frac{16}{2a+b}$ 의 최솟값과 그 때의 a, b 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답: 최솟값= _____

▶ 답: a = _____

▶ 답: b = _____

41. $a > 0, b > 0$ 이고 $x = a + \frac{1}{b}, y = b + \frac{1}{a}$ 이라 할 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

42. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

주어진 식을 전개하면

$$1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$$

이 때, (산술평균) \geq (기하평균)을 이용하면

$$a+b+c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}$$

$$ab+bc+ca \geq 3 \times \boxed{\text{(가)}} \text{이고,}$$

등호는 $a=b=c$ 일 때 성립한다.

$$\therefore 8 \geq 1 + 3(abc)^{\frac{1}{3}} + 3(abc)^{\frac{2}{3}} + abc = \{1 + (abc)^{\frac{1}{3}}\}^3$$

$$\text{그러므로 } (abc)^{\frac{1}{3}} + 1 \leq 2$$

곧, $abc \leq 1$ 을 얻는다.

또, 등호는 $\boxed{\text{(나)}}$ 일 때 성립한다.

- ① $abc, a=b=c=1$ ② $(abc)^{\frac{1}{3}}, a=2$ 이고 $b=c$
 ③ $(abc)^{\frac{2}{3}}, a=b=c=1$ ④ $abc, a=b$ 또는 $c=2$
 ⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}, a=b=c=2$

43. 함수 $y = \frac{6}{x}$ 의 그래프 위의 한 점 P에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 Q,R이라 할 때, 사각형 OQPR의 둘레의 길이의 최소값은?
(단, $x > 0$, O는 원점)

- ① $6\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

44. 실수 x 에 대하여, 분수식 $\frac{x^4 + 3x^2 + 6}{x^2 + 1}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답: _____

45. 다음 부등식 중 $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$ 을 이용하여 증명할 수 있는 것은?

㉠ $(2x + 3y + 4z)^2 \leq 9(2x^2 + 3y^2 + 4z^2)$
 ㉡ $(x + y + z)^2 \leq 14\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}\right)$
 ㉢ $(x + y + z)^2 \leq 6\left(x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3}\right)$
 ㉣ $(\sqrt{a+x} + \sqrt{b+y} + \sqrt{c+z})^2 \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 + (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2$

- ① ㉠, ㉡, ㉣ ② ㉠, ㉡, ㉣ ③ ㉠, ㉢, ㉣
 ④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

46. 실수 x, y, z 에 대하여 $x + 2y + z = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 가 성립할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{5}$

⑤ $\frac{1}{6}$

47. 실수 a, b, c 가 다음 두 등식을 만족할 때, c 값의 범위는?

$$a + b + c = 5, \quad b^2 + c^2 = 11 - a^2$$

- ① $-\frac{1}{2} \leq c \leq \frac{1}{2}$ ② $-3 \leq c \leq \frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3} \leq c \leq 3$
④ $1 \leq c \leq \frac{3}{2}$ ⑤ $1 \leq c \leq \frac{5}{2}$