1. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$이다.

② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.

③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.

④ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$이다.

⑤ $a + \frac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

해설

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \cdots$ 절대부등식

$\frac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$일 때 성립한다.

2. x가 양의 실수 일 때, $x^2+1+\frac{1}{x^2}$의 최솟값과 그 때의 x값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2>0,\ \frac{1}{x^2}>0$이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$x^2+1+\frac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{x^2\times\frac{1}{x^2}}+1\geq 2+1=3$

등호는 $x^2=\frac{1}{x^2}$일 때 성립하므로 $x^4=1$

따라서 양의 실수 x는 1이다.

최솟값은 3이고, x값은 1이다.

3. $x>3$일 때 $\frac{3}{x-3}+2+3x$의 최솟값은?

① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 17

해설

$\frac{3}{x-3}+2+3x=3(x-3)+\frac{3}{x-3}+11$

이 때, $x>3$이므로 $3(x-3)>0$, $\frac{3}{x-3}>0$

산술평균과 기하평균에 의해

$3(x-3)+\frac{3}{x-3}+11$

$\geq 2\sqrt{3(x-3)\cdot\frac{3}{x-3}}+11$

$=2\cdot 3+11=17$

(단, 등호는 $3(x-3)=\frac{3}{x-3}$, 즉 $x=4$일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

4. 실수 x, y에 대하여 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$이 성립할 때, $x+y$의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$　② 3　③ $\sqrt{13}$　④ 5　⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$(2^2+3^2)\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2\right\} \geq (x+y)^2$

$13 \geq (x+y)^2$ 이므로

$-\sqrt{13} \leq x+y \leq \sqrt{13}$

$\therefore x+y$의 최댓값은 $\sqrt{13}$

5. a, b, x y가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$일 때 $ax + by$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 16

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
$8 \times 2 \geq (ax + by)^2$
$\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$
(최댓값) $\times$(최솟값)$= -16$

6. 실수 $a,\ b,\ x,\ y$에 대하여 $a^2+b^2=5, x^2+y^2=3$일 때 다음 중 $ax+by$의 값이 될 수 없는 것은?

① -1　② 0　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$a,\ b,\ x,\ y$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$5 \times 3 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -\sqrt{15} \leq ax+by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax+by$의 범위에 속하지 않는다.

7. 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x^2+y^2+z^2=6$일 때 $x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z$의 최댓값 M과 최솟값 m은?

① $M=3,\ m=0$
② $M=3, m=-3$
③ $M=6, m=0$
④ $M=6, m=-6$
⑤ $M=6, m=-12$

해설

$x,\ y,\ z$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$\left\{1+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right\}(x^2+y^2+z^2)$
$\geq (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$
$36 \geq (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$
$-6 \leq x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z \leq 6$
$\therefore M=6,\ m=-6$

8. $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이고, $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2+3^2)\left\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right\}$

$\geq (\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$

$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2 \leq 14(a+b+c)=14^2$

이 때 $a \geq 0,\ b \geq 0, c \geq 0$이므로

$0 \leq \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \leq 14$

따라서 최댓값은 14이다.

9. $a \geq 0,\ b \geq 0$일 때, $\frac{a+b}{2}$ (가) $\sqrt{ab}$임을 다음과 같은 과정으로 증명을 하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

> **증명**
>
> $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(나)^2}{2}$ 이므로
> 부등식 $\frac{a+b}{2}$ (가) $\sqrt{ab}$이 성립함을 알 수 있다.
> 이 때, 등호는 (다)일 때 성립한다.

① $\geq$, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, $a = b$
② $\geq$, $a - b$, $a = b = 0$
③ $>$, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, $a = b$
④ $>$, $a - b$, $a = b$
⑤ $\geq$, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, $a \geq b$

해설

$$\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 = \frac{a}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}} + \frac{b}{2}$$

$$= \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$$

(가) , (나)의 결과에서 $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$이므로

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(다) $\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 \geq 0$에서

등호가 성립할 때는 $\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}} = 0$일 때이므로

등호는 $a = b$일 때 성립한다.

10. 한 자리의 자연수 $l,\ m,\ n$에 대하여 $\{l,\ m,\ n\} = \{p,\ q,\ r\}$가 성립한다고 한다. 이 때, $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r}$의 최소값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} \geq 3 \times 3\sqrt{\frac{l}{p} \times \frac{m}{q} \times \frac{n}{r}}$

그런데 $\{l, m,\ n\} = \{p, q, r\}$이므로

$lmn = pqr$이다.

따라서, $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} \geq 3$

(단, 등호는 $l = p,\ m = q,\ n = r$일 때 성립)

$\therefore$구하는 최소값은 3

11. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$일 때, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$

$\therefore \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$

12. $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $\frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c}$의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$\frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a}\times\frac{2c}{b}\times\frac{2a}{c}} = 3\times 2 = 6$

$\therefore \frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c} \geq 6$

13. 길이가 $16\,\mathrm{m}$ 인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① $8\,\mathrm{m}^2$ ② $16\,\mathrm{m}^2$ ③ $25\,\mathrm{m}^2$ ④ $36\,\mathrm{m}^2$ ⑤ $64\,\mathrm{m}^2$

해설

가로를 x, 세로를 y라 하자.
$2(x+y)=16 \quad x+y=8$
산술기하평균을 사용하면,
$x+y \geq 2\sqrt{xy}$
$4 \geq \sqrt{xy}$
$\Rightarrow \quad 16 \geq xy$
$\therefore$ 넓이의 최대값 : $16(\mathrm{m}^2)$

14. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

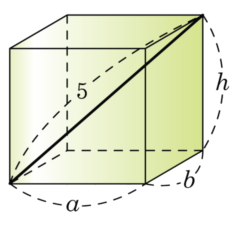
$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore\ -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore\ M=10,\ m=-10$

$\therefore\ M-m=10-(-10)=20$

15. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h 이고, 대각선의 길이가 5인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



① $5\sqrt{3}$　　② $4\sqrt{5}$　　③ $20\sqrt{3}$

④ $25\sqrt{5}$　　⑤ $24\sqrt{6}$

해설

$a^2+b^2+h^2=25$

코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

$(a^2+b^2+h^2)(4^2+4^2+4^2) \geq (4a+4b+4h)^2$

$25 \cdot 48 \geq (4a+4b+4h)^2$

$\Rightarrow \quad 4(a+b+h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$

$\therefore$ 모서리의 길이의 합 $4(a+b+h)$ 의 최댓값

　: $20\sqrt{3}$

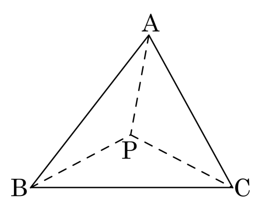
16. 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각 x_1, x_2, x_3라 할 때, $x_1^2+x_2^2+x_3^2$의 최솟값은?

① $-\frac{288}{25}$ ② $\frac{144}{15}$ ③ $\frac{144}{25}$ ④ $\frac{288}{25}$ ⑤ $\frac{576}{25}$

해설

주어진 삼각형의 세 변을
$\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=8$이라 하면
$\angle C$가 직각인 직각삼각형이므로
$\triangle ABC = \triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PAC$
$\therefore 24 = \frac{1}{2}\times x_1 \times 6 + \frac{1}{2}\times x_2 \times 8 + \frac{1}{2}\times x_3 \times 10$이므로
$3x_1+4x_2+5x_3=24$
코시-슈바르츠 부등식에서
$(3^2+4^2+5^2)({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2) \geq (3x_1+4x_2+5x_3)^2$
$\therefore 50\cdot({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)\geq 576$
$\therefore {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2 \geq \frac{576}{50}=\frac{288}{25}$
따라서 최솟값은 $\frac{288}{25}$

17. 넓이가 a 인 삼각형 ABC 의 내부에 한 점 P 에 대하여 $\triangle$PAB, $\triangle$PBC, $\triangle$PCA 의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3 이라 할 때 $S_1^2+S_2^2+S_3^2$ 의 최솟값은?



① $\dfrac{a^2}{3}$　　② a^2　　③ $\sqrt{3}a^2$

④ $3a^2$　　⑤ $3\sqrt{3}a^2$

해설

$S_1+S_2+S_3=a$

$(1^2+1^2+1^2)(S_1^2+S_2^2+S_3^2) \geq (S_1+S_2+S_3)^2=a^2$

$\therefore S_1^2+S_2^2+S_3^2 \geq \dfrac{a^2}{3}$

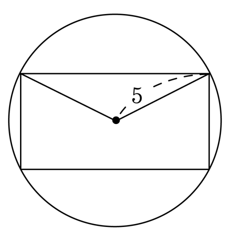
18. 실수 a, b 에 대하여 $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}$ 의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$a,\ b$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(1^2+1^1) \geq (a+b)^2$ 에서
$2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$ 이므로
$\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2} = \dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2} \leq \dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = 2$
(단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)
따라서 $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}$ 의 최댓값은 2이다.

19. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① $\sqrt{2}$　② $5\sqrt{2}$　③ $10\sqrt{2}$

④ $20\sqrt{2}$　⑤ $100\sqrt{2}$

해설

직사각형의 대각선의 길이는 10 이고,
가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b 라 하면
$a^2 + b^2 = 100$
코시-슈바르츠의 부등식에 의해
$(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$
$\therefore 200 \geq (a + b)^2$ $\therefore a + b \leq 10\sqrt{2}$ 이므로
직사각형 둘레의 길이의 최댓값은
$2(a + b) = 20\sqrt{2}$

20. 다음은 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 <u>못한</u> 부분은?

$\frac{1}{x}+\frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}} \cdots$ ㉠
$= \frac{4}{\sqrt{xy}}$
$\therefore \sqrt{xy} \geq 4 \cdots$ ㉡
$\therefore x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2\cdot 4 = 8 \cdots$ ㉢
따라서 $x+y$의 최솟값은 8이다. $\cdots\cdots$ ㉣

① ㉠
② ㉡
③ ㉢
④ ㉣
⑤ 틀린 곳이 없다.

해설

㉠에서 등호가 성립하는 경우는 $\frac{1}{x}=\frac{4}{y}$
즉 $y=4x$일 때이고,
㉢에서 등호가 성립하는 경우는
$x=y$일 때이므로 서로 일치하지 않는다.
따라서 $x+y$의 최솟값은 8이 될 수 없다.

21. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수 a, b, H에 대하여
적당한 실수 r가 존재하여
$a = H + \frac{a}{r}$, $H = b + \frac{b}{r} \cdots$ (A)가 성립한다고 하자.
그러면 $a \neq b$이고 $\frac{a-H}{a} =$ (가) $\cdots (B)$이므로
$H =$ (나)이다.
역으로, $a \neq b$인 양수 a, b에 대하여
$H =$ (나)이면,
식 (B)가 성립하고 $\frac{a-H}{a} \neq 0$이다.
(B)에서 $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$이라 놓으면
식 (A)가 성립한다. 따라서 양수 a, b, H에 대하여 적당한 실수 r이 존재하여
식 (A)가 성립하기 위한 (다) 조건은
$a \neq b$이고 $H =$(나)이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

① $\frac{H-b}{b}$, $\frac{2ab}{a+b}$, 필요충분
② $\frac{H-b}{b}$, $\frac{ab}{a+b}$, 필요충분
③ $\frac{H-b}{b}$, $\frac{2ab}{a+b}$, 충분
④ $\frac{b-H}{b}$, $\frac{2ab}{a+b}$, 필요
⑤ $\frac{b-H}{b}$, $\frac{ab}{a+b}$, 충분

해설

$a = H + \frac{a}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{a-H}{a}$

$H = b + \frac{b}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{H-b}{b}$

$\therefore \frac{a-H}{a} =$ (가) $\frac{H-b}{b}$

$ab - bH = aH - ab$이므로 $H =$ (나) $\frac{2ab}{a+b}$

따라서 (다) 필요충분조건

22. $a > 0,\ b > 0$일 때, 다음 네모 속에서 옳은 것은 모두 몇 개인가?

Ⅰ. $1 + a > \sqrt{1 + 2a}$
Ⅱ. $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
Ⅲ. $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$
Ⅳ. $\dfrac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$
Ⅴ. $(a+b)\left(\dfrac{2}{a} + \dfrac{2}{b}\right) \geq 4$
Ⅵ. $(2a+b)\left(\dfrac{8}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geq 25$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

Ⅰ. $(1+a)^2 - (\sqrt{1+2a})^2$
$= a^2 > 0\ (\because a > 0)$

$\therefore (1+a) > \sqrt{1+2a}$ (◯)
Ⅱ. $(\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$
$= 2(a+b) - (a + b + 2\sqrt{ab})$
$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$
$\therefore \sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (◯)

Ⅲ. $a + \dfrac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \dfrac{1}{a}} = 2$ (◯)

Ⅳ. $\dfrac{2ab}{a+b} - \sqrt{ab} = \dfrac{-\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$

$= \dfrac{-\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{a+b} \leq 0$

$\therefore \dfrac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$ (◯)

Ⅴ. $(a+b)\left(\dfrac{2}{a} + \dfrac{2}{b}\right) = 4 + \dfrac{2a}{b} + \dfrac{2b}{a}$

$\dfrac{2a}{b} + \dfrac{2b}{a} \geq 2\sqrt{\dfrac{2a}{b} \times \dfrac{2b}{a}} = 4$

$\therefore 4 + \dfrac{2a}{b} + \dfrac{2b}{a} \geq 8$ (×)

Ⅵ $(2a+b)\left(\dfrac{8}{a} + \dfrac{1}{b}\right) = 17 + \dfrac{2a}{b} + \dfrac{8b}{a}$

$\dfrac{2a}{b} + \dfrac{8b}{a} \geq 2\sqrt{\dfrac{2a}{b} \times \dfrac{8b}{a}} = 8$

$\therefore (2a+b)\left(\dfrac{8}{a} + \dfrac{1}{b}\right) = 17 + \dfrac{2a}{b} + \dfrac{8b}{a} \geq 25$ (◯)

23. $a>0,\ b>0,\ c>0$일 때
$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로

$\frac{b}{a}>0,\ \frac{c}{b}>0,\ \frac{a}{c}>0$

$1+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{1\times\frac{b}{a}}=2\sqrt{\frac{b}{a}}$

$1+\frac{c}{b}\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}},\ \ 1+\frac{a}{c}\geq 2\sqrt{\frac{a}{c}}$

$\therefore\ \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)$

$\geq 8\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{c}{b}}\sqrt{\frac{a}{c}}=8$

$\therefore\ \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\geq 8$

따라서 최솟값은 8

24. $x > -1$일 때 $x + \dfrac{1}{x+1}$의 최솟값을 m, 그 때의 x의 값을 k라 할 때 $m + k$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x + 1 > 0$이므로 $x + \dfrac{1}{x+1} = x + 1 + \dfrac{1}{x+1} - 1 \geq 2\sqrt{(x+1)\dfrac{1}{x+1}} - 1 = 1$

$\therefore m = 1$

이 때 등호는

$x + 1 = \dfrac{1}{x+1}$에서 $x = 0, -2$

$x > -1$이므로 등호는 $x = 0$일 때만 성립한다.

$\therefore\ k = 0$

$\therefore\ m + k = 1$

25. 다음은 양수 x, y, z가 $x^2+y^2+z^2=1$을 만족할 때, $P=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$ 의 최솟값을 구하는 과정이다.

$$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2x^2+2y^2+2z^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2(x^2+y^2+z^2)$$
$\therefore P^2\geq($ 가 $)$
따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,
등호는 $x=y=z=($ 다 $)$ 일 때, 성립한다.

위의 과정에서 (가)~(다)에 각각 알맞은 것은?

① 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$　② 9, 3, $\frac{1}{\sqrt{3}}$　③ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}$
④ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$　⑤ 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2(x^2+y^2+z^2)$$

조건에서 $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로

$$P^2=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2$$
$$\geq\sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2}\cdot\frac{z^2x^2}{y^2}}+\sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{z^2}}+\sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}}+2$$
$$=x^2+y^2+z^2+2=(3)$$

$\therefore$ $P\geq\sqrt{3}$ 이므로 P의 최솟값은 $(\sqrt{3})$ 이고,

등호는 $x=y=z=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 일 때 성립한다.

$\because$ $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로 $x=y=z$ 이면 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

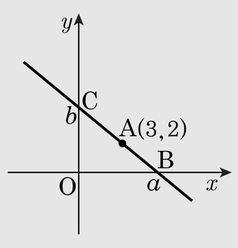
26. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0, b>0)$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, $\triangle$OBC 의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ $2\sqrt{6}$

해설

$\triangle$OBC 의 넓이를 S 라 하면

$S=\frac{1}{2}ab$, A(3, 2) 는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 위의 점이므로



$$1=\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{3}{a}\times\frac{2}{b}}=2\sqrt{\frac{3}{S}}$$

양변을 제곱하면 $1\geq\frac{12}{S}$ $\therefore S\geq 12$

따라서 $\triangle$OBC 의 넓이의 최솟값은 12 이다.

27. 세 양수 a, b, c가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

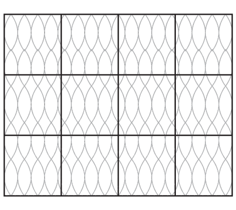
Ⅰ. $a+b+c \geq 3$
Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3$
Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

$abc = 1$이므로
Ⅰ. $a+b+c \geq 3\times \sqrt[3]{abc} = 3$
Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2\times b^2\times c^2} = 3$
Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{ab\times bc\times ca} = 3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1)$
$= abc+(ab+bc+ca)+(a+b+c)+1$
$\geq 1+3+3+1 = 8$

28. 어떤 농부가 길이 $120\,\text{m}$ 인 철망을 가지고 아래 그림과 같이 열두 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 최대넓이를 구하여라.



① $120\,\text{m}^2$　② $180\,\text{m}^2$　③ $240\,\text{m}^2$

④ $300\,\text{m}^2$　⑤ $360\,\text{m}^2$

해설

전체의 가로를 x, 세로를 y라 하면

$4x+5y=120$

넓이 : xy

$4x+5y=120 \geq 2\sqrt{4x \cdot 5y}$

$60 \geq \sqrt{20xy}$, $3600 \geq 20xy$

$\therefore 180 \geq xy$

따라서 넓이의 최대값은 180

해설

$$\begin{aligned} xy &= x \times \frac{1}{5}(120-4x) \\ &= -\frac{4}{5}x^2+24x \\ &= -\frac{4}{5}(x^2-30x+225-225) \\ &= -\frac{4}{5}(x-15)^2+180 \end{aligned}$$

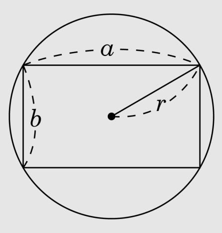
$x=15(\text{m})$, $y=12(\text{m})$ 일 때,

최대넓이는 $180\,\text{m}^2$

29. 반지름이 $r(\mathrm{cm})$인 원에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면?

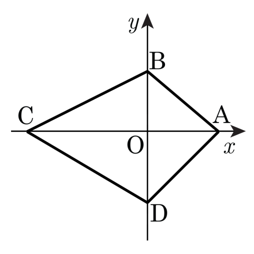
① $2r(\mathrm{cm}^2)$　② $r^2(\mathrm{cm}^2)$　③ $2r^2(\mathrm{cm}^2)$
④ $\sqrt{2}r^2(\mathrm{cm}^2)$　⑤ $\dfrac{r^2}{2}(\mathrm{cm}^2)$

해설



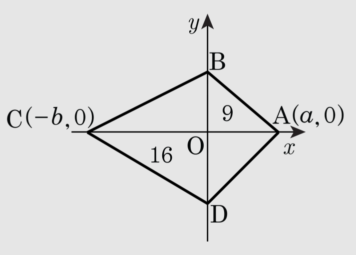
$a^2+b^2=(2r)^2$
산술기하평균의 관계에 의해
$a^2+b^2 \geq 2\sqrt{(ab)^2}$
$4r^2 \geq 2(ab)$
$ab \leq 2r^2$,
(직사각형 넓이의 최댓값) $=2r^2$

30. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. $\triangle$OAB와 $\triangle$OCD의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



① 37　② 40　③ 43　④ 46　⑤ 49

해설



A$(a,\ 0)$이면, B$\left(0,\ \dfrac{18}{a}\right)$이고,

C$(-b,\ 0)$이면 D$\left(0,\ -\dfrac{32}{b}\right)$이다.

$(\because\ a>0,\ b>0)$

(□ABCD의 넓이)

$= \dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BD}}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot\left(\dfrac{18}{a}+\dfrac{32}{b}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\cdot 50+\left(\dfrac{9b}{a}+\dfrac{16a}{b}\right)$

$a>0,\ b>0$이므로,

산술기하평균을 이용하면,

□ABCD$\geq 25+2\cdot\sqrt{\dfrac{9b}{a}\times\dfrac{16a}{b}}=49$

31. 좌표평면 위의 점 A(1, 2)를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0,\ b>0)$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, △OBC의 최소 넓이는?

① 3　② 3.5　③ 4　④ 4.5　⑤ 5

해설

B$(a,\ 0)$, C$(0,\ b)$이므로
△OBC의 넓이를 S라 하면
$S=\frac{1}{2}ab\cdots\cdots$㉠
직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$은 점 $(1,\ 2)$를 지나므로
$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1\cdots\cdots$㉡
㉠, ㉡에서
$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}=2\sqrt{\frac{1}{S}}$
$\therefore\ S\geq 4$

32. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은 x분씩 늘어나며 y명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한 xy의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

10건이 적발되었으므로 늘어난 심사 시간은 $10x$,
y명이 기다리고 있으므로 기본 심사 시간은 $2y$분이다.
시간이내에 심사를 끝내야 하므로
$10x + 2y \le 60 \cdots$ ㉠
$x > 0,\ y > 0$이므로
산술평균, 기하평균에 의하여
$10x + 2y \ge 2\sqrt{10x \cdot 2y}$
$10x + 2y \ge 2\sqrt{20xy} \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$2\sqrt{20xy} \le 60,\ 20xy \le 900$
$\therefore xy \le 45$
따라서 xy의 최댓값은 45이다.

33. 다음은 a, b, c, d, x, y, z, w가 실수일 때, 부등식 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) \geq (ax+by+cz+dw)^2$이 성립함을 증명하는 과정의 일부이다. ㉠, ㉡ 부분에 들어갈 기호가 순서대로 적당한 것은?

> [증명] 모든 실수 t에 대하여 다음 부등식이 성립한다.
> $(at-x)^2+(bt-y)^2+(ct-z)^2+(dt-w)^2$ $\boxed{㉠}$ 0
> 이것을 t에 관하여 정리하면
> $(a^2+b^2+c^2+d^2)t^2-2(ax+by+cz+dw)t$
> $+(x^2+y^2+z^2+w^2)$ $\boxed{㉠}$ 0
> 따라서 항상 성립하기 위해서는
> $(ax+by+cz+dw)^2-$
> $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$ $\boxed{㉡}$ $0\cdots\cdots$(이하 생략)

① >, <　② ≥, <　③ ≤, >　④ ≤, ≥　⑤ ≥, ≤

해설

생략

34. $x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6$을 만족하는 실수 $x,\ y, z$에 대하여 x가 취할 수 있는 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\dfrac{M}{m}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+y+z=4$에서 $y+z=4-x\cdots$㉠
$x^2+y^2+z^2=6$에서 $y^2+z^2=6-x^2\cdots$㉡
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(1^2+1^2)(y^2+z^2)\geq(y+z)^2$
(단, 등호는 $y=z$일 때 성립)
㉠, ㉡을 대입하면
$2(6-x^2)\geq(4-x)^2,\ 3x^2-8x+4\leq 0$
$(3x-2)(x-2)\leq 0 \quad \therefore \dfrac{2}{3}\leq x\leq 2$
따라서 $M=2,\ m=\dfrac{2}{3}$이므로 $\dfrac{M}{m}=3$

35. 다음 부등식 중 옳은 것을 고르면? (단, a, b는 0이 아닌 실수)

① $\sqrt{2(a^2+b^2)} \le |a|+|b| \le \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|}$

② $\sqrt{2(a^2+b^2)} \le \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b|$

③ $|a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)} \le \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|}$

④ $\dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le \sqrt{2(a^2+b^2)} \le |a|+|b|$

⑤ $\dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)}$

해설

$|a|>0,\ |b|>0$이므로

$\dfrac{|a|+|b|}{2} \ge \sqrt{|a||b|} \ge \dfrac{2|a||b|}{|a|+|b|}$

$\therefore\ \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b| \cdots$ ㉠

한편 $\left(\sqrt{2(a^2+b^2)}\right)^2-(|a|+|b|)^2$

$=2(a^2+b^2)-(a^2+2|a||b|+b^2)$

$=a^2-2|a||b|+b^2$

$=(|a|-|b|)^2 \ge 0$

$\therefore\ \left(\sqrt{2(a^2+b^2)}\right)^2 \ge (|a|+|b|)^2$

$\therefore\ |a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)}$

36. 삼각형의 세 변의 길이를 $a,\ b,\ c$라 하고 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$라 할 때, $(s-a)(s-b)(s-c)\le kabc$를 만족시키는 상수 k의 값을 구하면?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{7}$　④ $\frac{1}{8}$　⑤ $\frac{1}{12}$

해설

$s-a=\frac{1}{2}(a+b+c)-a=\frac{1}{2}(-a+b+c)>0$
($\because a,\ b,\ c$는 삼각형의 세 변)
같은 방법으로 $s-b>0,\ s-c>0$
(산술평균)≥(기하평균)이므로
$2\sqrt{(s-a)(s-b)}\le(s-a)+(s-b)=c$
(등호는 $a=b$일 때 성립)
$2\sqrt{(s-b)(s-c)}\le(s-b)+(s-c)=a$
(등호는 $b=c$일 때 성립)
$2\sqrt{(s-c)(s-a)}\le(s-c)+(s-a)=b$
(등호는 $c=a$일 때 성립)
변변 곱하면 $8(s-a)(s-b)(s-c)\le abc$
$\therefore (s-a)(s-b)(s-c)\le\frac{1}{8}abc$
(등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$\therefore k=\frac{1}{8}$

37. 임의의 양수 x, y에 대하여 부등식 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{k(x+y)}$를 만족시키는 k의 값의 범위를 구하면?

① $k\ge1$ ② $k\ge2$ ③ $k\le-1$
④ $k\le-2$ ⑤ $k\le\frac{2}{3}$

해설

준식의 양변을 제곱하여 정리하면

$k\ge\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x+y}$

$\therefore k\ge1+\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\cdots$①

그런데 $x+y\ge2\sqrt{xy}$ 에서 $1\ge\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}$ 이므로

$\therefore 2\ge1+\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\cdots$②

$\therefore$ ①, ②에서 $k\ge2$

38. 임의의 양수 $a,\ b$에 대하여 부등식 $(a+b)^3 \le k(a^3+b^3)$ 이 항상 성립할 때, 실수 k의 최솟값을 구하시오.

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 6

해설

$(a+b)^3 \le k(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 이므로

$$k \ge \frac{(a+b)^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2-3ab} = \frac{1}{1-3\times\frac{ab}{(a+b)^2}} \cdots ①$$

그런데 $a>0,\ b>0$ 이므로 $a+b \ge 2\sqrt{ab}$

$\therefore\ (a+b)^2 \ge 4ab$

$\therefore\ \frac{ab}{(a+b)^2} \le \frac{1}{4} \cdots$ ②

②를 ①에 대입하면

$$k \ge \frac{1}{1-3\times\frac{1}{4}} = 4$$

$\therefore\ k$의 최솟값은 4

39. x, y, z가 양의 실수일 때 $(x+y+z)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z}\right)$의 최솟값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

주어진 식을 전개하면

$1+\frac{x+y}{z}+\frac{z}{x+y}+1$

$=2+\frac{x+y}{z}+\frac{z}{x+y} \geq 2+2\sqrt{\frac{x+y}{z}\times\frac{z}{x+y}}$

$=4$

40. 양수 a, b에 대하여 다음 식 $a^2+b+\frac{16}{2a+b}$의 최솟값과 그 때의 a, b의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최솟값 $= 7$

▷ 정답 : $a=1$

▷ 정답 : $b=2$

해설

$a^2+b+\frac{16}{2a+b}$

$=-1+(a^2-2a+1)+2a+b+\frac{16}{2a+b}$

$=-1+(a-1)^2+(2a+b+\frac{16}{2a+b})$ $\cdots$ ①

$2a+b+\frac{16}{2a+b} \geq 2\sqrt{(2a+b)(\frac{16}{2a+b})}=8$에서

등호는 $2a+b=\frac{16}{2a+b}$ 일 때 성립하고

이때, $2a+b=4$ (a, b는양수) $\cdots$ ②

①에서 최소는 $a=1$ 일 때이다.

$\therefore$ ②에서 $a=1, b=2$일 때 최솟값 : 7

41. $a > 0,\ b > 0$ 이고 $x = a + \frac{1}{b},\ y = b + \frac{1}{a}$ 이라 할 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값은?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

$x^2 + y^2 = \left(a^2 + \frac{2a}{b} + \frac{1}{b^2}\right) + \left(b^2 + \frac{2b}{a} + \frac{1}{a^2}\right)$

$= \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)$

그런데 $a > 0,\ b > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균의 관계에 의하여

$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} = 2$

(등호는 $a^2 = \frac{1}{a}^2$ 일 때)

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$

(등호는 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ 일 때)

$b^2 + \frac{1}{b}^2 \geq 2\sqrt{b^2 \cdot \frac{1}{b^2}} = 2$

(등호는 $b^2 = \frac{1}{b^2}$ 일 때)

$\therefore\ x^2 + y^2 \geq 2 + 2 \cdot 2 + 2 = 8$

따라서, $x^2 + y^2$ 의 최솟값은 8 이다.

42. $(1+a)(1+b)(1+c)=8$인 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $abc \le 1$임을 다음과 같이 증명하였다.
(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

주어진 식을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이 때, (산술평균)≥(기하평균)을 이용하면
$a+b+c \ge 3(abc)^{\frac{1}{3}}$
$ab+bc+ca \ge 3\times$ $\boxed{(가)}$ 이고,
등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.
$\therefore 8 \ge 1+3(abc)^{\frac{1}{3}}+3(abc)^{\frac{2}{3}}+abc=\left\{1+(abc)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$
그러므로 $(abc)^{\frac{1}{3}}+1 \le 2$
곧, $abc \le 1$을 얻는다.
또, 등호는 $\boxed{(나)}$ 일 때 성립한다.

① abc , $a=b=c=1$
② $(abc)^{\frac{1}{3}}$, $a=2$ 이고 $b=c$
③ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a=b=c=1$
④ abc , $a=b$ 또는 $c=2$
⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a=b=c=2$

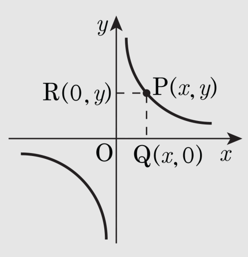
해설

(산술평균)≥(기하평균)을 이용하면
$a+b+c \ge 3(abc)^{\frac{1}{3}}$, $ab+bc+ca \ge 3(abc)^{\frac{2}{3}}$
또, 위에서 등호는 $a=b=c$일 때 성립하므로 $(1+a)^3=8$에서
$a=b=c=1$

43. 함수 $y = \frac{6}{x}$ 의 그래프 위의 한 점 P 에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, 사각형 OQPR 의 둘레의 길이의 최소값은? (단, $x > 0$, O 는 원점)

① $6\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설



그래프에서 사각형 OQPR 의

$\left(\text{가로의 길이 : } x,\ \text{세로의 길이 : } y = \frac{6}{x}\right)$

둘레는 $2(x+y) = 2\left(x + \frac{6}{x}\right) \geq$

$2 \cdot 2\sqrt{x \cdot \frac{6}{x}} = 4\sqrt{6}$

$\therefore$ 둘레의 최소값$= 4\sqrt{6}$

해설

사각형 OQPR 의

$\left(\text{가로의 길이 : } x \text{세로의 길이 : } y = \frac{6}{x}\right)$

$2(x+y)$ 의 최소값을 구하는 문제이다.

$2(x+y) = k$ 라 놓고

$y = \frac{6}{x}$ 의 관계식과 연립해서푼다.

$k = 2\left(x + \frac{6}{x}\right)$

이 식을 x에 대한 이차식으로 정리하면

$kx = 2x^2 + 12,\ 2x^2 - kx + 12 = 0$

두 근의 합, 곱 모두 양,

실근을 가질 조건 $(D \geq 0)$ 을 이용

$D = k^2 - 96 \geq 0$

$\therefore k \geq \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ $(\because k > 0)$

44. 실수 x에 대하여, 분수식 $\dfrac{x^4+3x^2+6}{x^2+1}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$\dfrac{x^4+3x^2+6}{x^2+1}$

$=\dfrac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+1)}+\dfrac{4}{(x^2+1)}$

$=(x^2+1)+\dfrac{4}{(x^2+1)}+1$

$x^2+1>0$이므로,

$(x^2+1)+\dfrac{4}{(x^2+1)}\geq 2\cdot\sqrt{(x^2+1)\cdot\dfrac{4}{(x^2+1)}}=4$

$\therefore\ (x^2+1)+\dfrac{4}{(x^2+1)}+1\geq 4+1=5$

45. 다음 부등식 중 $(ax+by+cx)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$ 을 이용하여 증명할 수 있는 것은?

㉠ $(2x+3y+4z)^2 \le 9(2x^2+3y^2+4z^2)$

㉡ $(x+y+z)^2 \le 14\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\right)$

㉢ $(x+y+z)^2 \le 6\left(x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}\right)$

㉣ $(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+y}+\sqrt{c+z})^2 \ge$
$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$

① ㉠, ㉡, ㉢　　② ㉠, ㉡, ㉣　　③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $(2x+3y+4z)^2$

$=\left\{\sqrt{2}(\sqrt{2}x)+\sqrt{3}(\sqrt{3}y)+\sqrt{4}(\sqrt{4}z)\right\}^2$

$\le (2+3+4)(2x^2+3y^2+4z^2)=9(2x^2+3y^2+4z^2)$

㉡ $(x+y+z)^2=(1\cdot x+2\cdot\frac{y}{2}+3\cdot\frac{z}{3})^2$

$\le (1^2+2^2+3^2)\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\right)$

$=14\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\right)$

㉢ $(x+y+z)^2$

$=\left(1\cdot x+\sqrt{2}\cdot\frac{y}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}\cdot\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2$

$\le (1+2+3)\left(x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}\right)$

$=6\left(x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}\right)$

㉣ 코시-슈바르츠 부등식을 이용하지 않고,
(좌변)− (우변)≥ 0 임을 보여야 한다.

46. 실수 x, y, z에 대하여 $x+2y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=2$가 성립할 때, x의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$x+2y+z=1 \Rightarrow 2y+z=1-x$

$x^2+y^2+z^2=2 \Rightarrow y^2+z^2=2-x^2$

$(2^2+1^2)(y^2+z^2) \geq (2y+z)^2$

($\because$ 코시-슈바르츠 부등식)

$5(2-x^2) \geq (1-x)^2$

$6x^2-2x-9 \leq 0$

$\frac{1-\sqrt{55}}{6} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{55}}{6}$

$\therefore$ 최댓값 + 최솟값 $= \frac{1}{3}$

47. 실수 $a,\ b,\ c$가 다음 두 등식을 만족할 때, c값의 범위는?

$$a+b+c=5,\ \ b^2+c^2=11-a^2$$

① $-\frac{1}{2} \le c \le \frac{1}{2}$　② $-3 \le c \le \frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{3} \le c \le 3$

④ $1 \le c \le \frac{3}{2}$　⑤ $1 \le c \le \frac{5}{2}$

해설

$a+b=5-c,\quad a^2+b^2=11-c^2$ 을

코시-슈바르츠 부등식

$(a^2+b^2)(1^2+1^2) \ge (a+b)^2$ 에 대입하면

$2(11-c^2) \ge (5-c)^2$

$3c^2-10c+3 \le 0,\ (3c-1)(c-3) \le 0$

$\therefore\ \frac{1}{3} \le c \le 3$