1. 이차함수 $y = 12x - (1 + 3x)(1 - 3x)$ 가 $x = p$ 에서 최소이고 최솟값은 q 일 때, $p + q$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{17}{3}$　② $-\frac{5}{3}$　③ 0　④ $\frac{8}{3}$　⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$y = 12x - (1 + 3x)(1 - 3x) = 9x^2 + 12x - 1$

$= 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 5 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$

따라서, $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최소이고

최솟값은 -5 이므로

$p = -\frac{2}{3}$, $q = -5$

$\therefore p + q = -\frac{17}{3}$

2. 이차함수 $y = -x^2 - 2x + 7(-3 \le x \le 1)$ 의 최댓값을 a, 최솟값을 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 4　　② 7　　③ 8　　④ 11　　⑤ 12

해설

$y = -x^2 - 2x + 7 = -(x+1)^2 + 8$ 이므로
꼭짓점의 좌표는 $(-1, 8)$ 이고, 위로 볼록한 포물선이다.
주어진 구간의 양 끝값을 구하면,
$x = -3$ 일 때 $y = -(-3+1)^2 + 8 = 4$
$x = 1$ 일 때 $y = -(1+1)^2 + 8 = 4$ 이다.
따라서 최댓값 $a = 8$ 이고, 최솟값 $b = 4$ 이므로 $a + b = 12$

3. x 에 대한 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 5k^2 - 5k + 7$ 에 대하여 y 가 최소가 되도록 하는 x 의 값과 그 때의 y 의 값으로 옳은 것은?

① $x = k,\ y = k^2 + k + 2$
② $x = k,\ y = k^2 - 3k + 4$
③ $x = 2k,\ y = k^2 + 4k + 1$
④ $x = 2k,\ y = k^2 - 5k + 7$
⑤ $x = 3k,\ y = 2k^2 - 3k + 6$

해설

$y = x^2 - 4kx + 5k^2 - 5k + 7$
$= (x - 2k)^2 + k^2 - 5k + 7$ 이므로
주어진 이차함수는 $x = 2k$ 일 때
최솟값 $k^2 - 5k + 7$ 을 갖는다.
따라서, 구하는 x, y 의 값은
$x = 2k,\ y = k^2 - 5k + 7$

4. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x = -1$ 에서 최댓값 7 을 갖고, $f(2) = -2$ 를 만족할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 3 ② 7 ③ 11 ④ -3 ⑤ -5

해설

$f(x) = a(x+1)^2 + 7, f(2) = -2$
$\Rightarrow 3^2 \times a + 7 = -2, a = -1$
$\therefore\ f(x) = -(x+1)^2 + 7 = -x^2 - 2x + 6$
따라서 $a + b + c = 3$

5. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 $x = 1$에서 최솟값 1을 가지고 $f(2) = 3$을 만족시킬 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a + b + c$의 값은?

① -4 ② -3 ③ 1 ④ 4 ⑤ 7

해설

$f(x) = a(x-1)^2 + 1$ 에서 $f(2) = 3$ 이므로

$a + 1 = 3 \quad \therefore a = 2$

즉, $f(x) = 2(x-1)^2 + 1 = 2x^2 - 4x + 3$ 이므로

$b = -4,\ c = 3$

$\therefore a + b + c = 2 - 4 + 3 = 1$

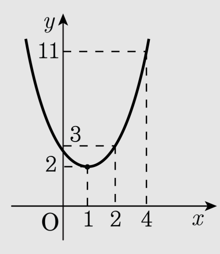
6. $2 \le x \le 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

따라서 함수의 그래프는 점$(1, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이므로



(i) $x = 2$ 일 때 최소이며, 최솟값은 $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$

$\therefore\ m = 3$

(ii) $x = 4$ 일 때 최대이며, 최댓값은 $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$

$\therefore\ M = 11$

$\therefore\ M + m = 14$

7. 함수 $y=-x^2-2x+5\ (-2 \le x \le 2\ )$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 을 구하여라.

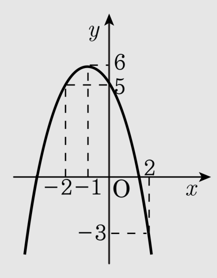
▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$y=-x^2-2x+5=-\left(x^2+2x+1-1\right)+5=-(x+1)^2+6$

점$(-1,6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.



$f(-2)=5, f(2)=-3$
따라서 최댓값은 $x=-1$ 일 때 $f(-1)=6$ 이며
최솟값은 $x=2$ 일 때 $f(2)=-3$ 이다.
$\therefore\ M+m=6-3=3$

8. 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3\ (0 \le x \le 3)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ 에서
$x = 1$ 일 때 최솟값 : -4,
$x = 3$ 일 때 최댓값 : 0
최댓값 + 최솟값 $= -4$

9. $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면
$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x-1)^2 + 1$
따라서 함수 $f(x)$ 는 점$(1, 1)$ 을 꼭지점으로 하는
아래로 볼록한 포물선이다.
그러므로 $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서
최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,
최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

10. $-2 \le x \le 2$ 에서 함수 $y = -x^2 + 4x + k$ 의 최댓값이 6 일 때, 최솟값은?

① -14 ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

해설

$y = -x^2 + 4x + k = -(x-2)^2 + k + 4$ 이므로
$x = 2$ 일 때 y 의 최댓값은 $k + 4$ 이다.
따라서 $k + 4 = 6$ 에서 $k = 2$
$-2 \le x \le 2$ 에서 $y = -(x-2)^2 + 6$ 은 $x = -2$ 일 때 최솟값을 가지며, 최솟값은 -10 이다.

11. 이차함수 $y = ax^2 + 2x + 4 + 2a$ ($a \neq 0$) 의 최댓값이 3 일 때, a 의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

이차함수에서 최댓값을 가지려면 이차항의 계수 a 의 부호는 음수이다.
주어진 식을 변형 하면

$y = a\left\{x^2 + \frac{2}{a}x + \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{a}\right)^2\right\} + 4 + 2a$

$= a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + 4 + 2a - \frac{1}{a}$

따라서 $x = -\frac{1}{a}$ 일 때,

최댓값 $4 + 2a - \frac{1}{a} = 3$ 을 가진다.

$4 + 2a - \frac{1}{a} = 3$ 에서 $2a - \frac{1}{a} + 1 = 0$

$2a^2 + a - 1 = 0$, $(a + 1)(2a - 1) = 0$

$\therefore a = -1$ 또는 $a = \frac{1}{2}$

$a = -1(\because\ a < 0)$

12. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$
$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$
따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$
$g(a) = -(a-2)^2 + 6$ 에서
$g(a)$ 의 최댓값은 6 이다.

13. $0 \le x \le 3$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 최댓값은? (단, $0 \le a \le 2$)

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설

$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ $(0 \le x \le 3)$

$0 \le \frac{a}{2} \le 1$ 이므로

최솟값 $m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4}$,

최댓값 $M = f(3) = 9 - 3a$

$\therefore M + m = 9 - 3a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a+6)^2 + 18$

이때, $0 \le a \le 2$ 이므로

$M + m$ 은 $a = 0$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

14. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 4a - 4$의 최댓값을 M이라 할 때, M의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

$y = -x^2 - 2ax + 4a - 4 = -(x + a)^2 + a^2 + 4a - 4$
이므로 $x = -a$일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 4$를 가진다.
$\therefore M = a^2 + 4a - 4 = (a + 2)^2 - 8$
따라서 M은 $a = -2$일 때 최댓값 -8을 가진다.

15. 함수 $y = -\left(x^2+4x+5\right)^2 - 2\left(x^2+4x\right) - 6$ 이 $x = m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y = -\left(x^2+4x+5\right)^2 - 2\left(x^2+4x\right) - 6$ 에서
$x^2+4x+5 = t$ 로 놓으면
$y = -\left(x^2+4x+5\right)^2 - 2\left(x^2+4x+5\right) + 4$
$= -t^2 - 2t + 4 = -(t+1)^2 + 5$
그런데 $t = x^2+4x+5 = (x+2)^2 + 1 \geq 1$ 이므로
$t = 1$, 즉 $x = -2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.
따라서, $m = -2,\ M = 1$
$\therefore M + m = -1$

16. $x-1=1-y=\dfrac{z-3}{2}$ 을 만족시키는 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x-1=1-y=\dfrac{z-3}{2}=k$ 라 하면

$x=k+1,\ y=1-k,\ z=2k+3$

그러므로

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (k+1)^2+(1-k)^2+(2k+3)^2 \\ &= 6k^2+12k+11 \\ &= 6(k+1)^2+5 \end{aligned}$$

따라서, $k=-1$ 일 때

$x^2+y^2+z^2$ 의 최솟값은 5 이다.

17. 두 함수 $f(x) = x^2 - 6x - 5,\ g(x) = 3x + 2$ 에 대하여 $F(x) = f(g(x))$ 라 정의하자.
$-2 \le x \le 3$ 에서 $F(x)$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 48　　② 56　　③ 64　　④ 72　　⑤ 80

해설

$t = g(x) = 3x + 2$ 라 놓으면
$-2 \le x \le 3$ 에서 $-4 \le t \le 11 \cdots$ ㉠
$F(x) = f(t) = t^2 - 6t - 5 = (t - 3)^2 - 14$
㉠의 범위에서
$t = 3$ 일 때 $m = -14$
$t = 11$ 일 때 $M = 50$
$\therefore\ M - m = 50 - (-14) = 64$

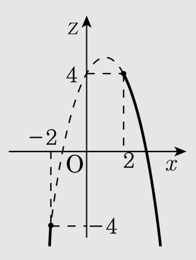
18. 실수 x, y 가 $x^2 - y^2 = 4$ 를 만족할 때, $2x - y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2 - y^2 = 4$ 에서 $y^2 = x^2 - 4 \cdots\cdots$ ㉠
이 때, $y^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 - 4 \geq 0$
$\therefore\ x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$
$2x - y^2 = 2x - (x^2 - 4) = -x^2 + 2x + 4$
$= -(x-1)^2 + 5$
$f(x) = -(x-1)^2 + 5$ 로 놓으면
$x \leq -2$, $x \geq 2$ 에서 함수 $z = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값은 4 이다.

19. 이차방정식 $x^2 + (a+1)x + a + 1 = 0$의 두 실근 α, β에 대하여 $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$의 값이 최소일 때, 상수 a의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ 0 ⑤ 3

해설

$x^2 + (a+1)x + a + 1 = 0$이 실근을 가지므로

$D = (a+1)^2 - 4(a+1) \geq 0,\ \ (a+1)(a-3) \geq 0$

$\therefore a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = -(a+1),\ \alpha\beta = a + 1$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta &= (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta \\ &= (a+1)^2 - (a+1) \\ &= a^2 + a = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

이때, $a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$ 이므로

$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$ 는 $a = -1$일 때 최솟값을 갖는다.

20. $x^2 + 2y^2 = 4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $4x + 2y^2$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M + m$의 값은?

① -8　② -4　③ 0　④ 4　⑤ 8

해설

$x^2 + 2y^2 = 4$에서 $2y^2 = 4 - x^2$
이때, y는 실수이므로 $2y^2 = 4 - x^2 \geq 0$
$\therefore -2 \leq x \leq 2$
$4x + 2y^2 = 4x + 4 - x^2 = -(x-2)^2 + 8$
$(-2 \leq x \leq 2)$
따라서 $x = -2$일 때, 최솟값 $m = -8$이고,
$x = 2$일 때, 최댓값 $M = 8$이므로 $M + m = 0$

21. 실수 $x,\ y$가 $2x+y=4$를 만족할 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하면?

① $\frac{16}{5}$ ② $\frac{8}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{17}{5}$

해설

$2x+y=4$ 에서 $y=-2x+4 \cdots$ ㉠

㉠에서
$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(-2x+4)^2 \\ &= 5x^2-16x+16 \\ &= 5\left(x^2-\frac{16}{5}x\right)+16 \\ &= 5\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{5} \end{aligned}$$

따라서 x^2+y^2은 $x=\frac{8}{5}$일 때,

최솟값 $\frac{16}{5}$을 갖는다.

22. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$

$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$

$= -(x-2)^2 - y^2 - z^2 + 9$

$x,\ y,\ z$는 실수이므로

$(x-2)^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0,\ z^2 \geq 0$

따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$는

$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$일 때,

최댓값 9를 갖는다.

23. x, y가 실수일 때, $x^2-6x+2y^2+4y+7$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$x^2-6x+2y^2+4y+7$

$=(x-3)^2+2(y+1)^2-4$이므로

$x=3,\ y=-1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

24. x, y, z가 실수일 때, $x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$의 최솟값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$
$=(x+1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1$
이 때, x, y, z가 실수이므로
$(x+1)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0,\ (z-4)^2 \geq 0$
$\therefore x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25 \geq -1$
따라서 $x=-1,\ y=3,\ z=4$일 때,
주어진 식의 최솟값은 -1이다.

25. $x^2+y^2=5$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x-y$는 $x=\alpha, y=\beta$에서 최댓값 m을 갖는다. 이때, $m+\alpha+\beta$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$2x-y=k$로 놓으면
$y=2x-k \cdots$ ㉠
㉠을 $x^2+y^2=5$에 대입하면
$x^2+(2x-k)^2=5$
$\therefore 5x^2-4kx+k^2-5=0 \cdots$ ㉡
㉡을 x에 대한 이차방정식으로 보면
x가 실수이므로
$\frac{D}{4}=4k^2-5(k^2-5)\ 0$, $k^2 \le 25$
$\therefore -5 \le k \le 5$
따라서 k의 최댓값은 5이다.
이 때의 x, y의 값은
㉡에서 $5x^2-20x+20=0$, $5(x-2)^2=0 \therefore x=2$
㉠에서 $y=4-5=-1$
따라서, $m=5, \alpha=2, \beta=-1$이므로
$m+\alpha+\beta=6$

26. 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2+2x+3}$ 의 함수값 중 가장 작은 정수를 m, 가장 큰 정수를 M 이라 할 때, $m+M$ 의 값은?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 8　　⑤ 9

해설

$\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2+2x+3}=y$라 놓고,

양변에 x^2+2x+3을 곱하면

$2x^2-4x+1=y(x^2+2x+3)$

$(y-2)x^2+2(y+2)x+3y-1=0$

x가 실수이므로

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(y+2)^2-(y-2)(3y-1)\geq 0$

$2y^2-11y-2\leq 0$

$\therefore \dfrac{11-\sqrt{137}}{4}\leq y\leq \dfrac{11+\sqrt{137}}{4}$

$11<\sqrt{137}<12$이므로

$-0.\times\times\times \leq y\leq 5.\times\times\times$

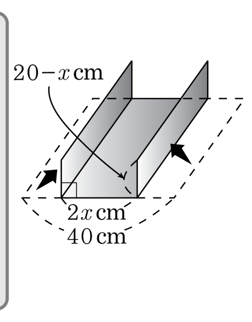
따라서 $m=0, M=5$이므로 $m+M=5$

27. 너비가 40 cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 될 때, 높이를 구하면?

① 10　　② 8　　③ 6　　④ 4　　⑤ 2

해설

직사각형의 가로를 $2x$ 라 하면 세로는 $20 - x$ 이다.
단면의 넓이는
$2x(20-x) = -2x^2+40x = -2(x^2-20x+200) + 100 = -2(x-10)^2 + 200$
$\therefore\ x = 10$ 일 때 넓이가 최대이다.



28. 직각을 낀 두 변의 길이 x, y의 합이 10이고 넓이가 8 이상인 직각삼각형이 있을 때, 다음 물음에 알맞게 답한 것을 고르면?

(1) x의 값의 범위를 구하여라. (2) 빗변의 길이를 z라 할 때, z^2을 x에 관한 식으로 나타내어라. (3) z^2의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

① (1) $2 \le x \le 9$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 52

② (1) $1 \le x \le 8$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 51

③ (1) $2 \le x \le 8$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 50

④ (1) $2 \le x \le 8$, (2) $x^2 - 20x + 100$, (3) 69, 52

⑤ (1) $2 \le x \le 8$, (2) $x^2 - 20x + 100$, (3) 69, 50

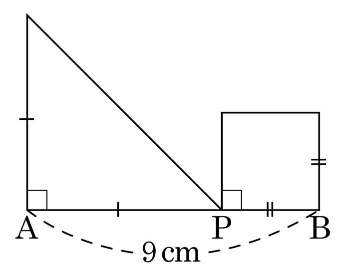
해설

(1) $x + y = 10$에서 $y = 10 - x$이고
삼각형의 넓이가 8 이상이므로
$\frac{1}{2}xy \ge 8,\ \frac{1}{2}x(10 - x) \ge 8$
$x^2 - 10x + 16 \le 0,\ (x-2)(x-8) \le 0$
$\therefore 2 \le x \le 8$

(2) 피타고라스의 정리에 의해
$z^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2$
$= 2x^2 - 20x + 100$

(3) $z^2 = 2x^2 - 20x + 100 = 2(x-5)^2 + 50$
이 때, $2 \le x \le 8$이므로 z^2은 $x = 5$일 때
최솟값 50 , $x = 2$ 또는 $x = 8$일 때
최댓값 68을 갖는다.

29. 길이가 9 cm 인 선분 AB 위에 점 P 를 잡아서 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형과 정사각형을 만들어 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AP 의 길이는?



① 6cm ② 5.5cm ③ 5cm

④ 4.5cm ⑤ 4cm

해설

선분 AP 의 길이를 x 라 하고 직각이등변삼각형과 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$S = \frac{1}{2}x^2 + (9-x)^2 = \frac{3}{2}(x-6)^2 + 27$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}} = 6(\mathrm{cm})$ 일 때 넓이가 최소이다.

30. $y=ax^2+bx+c$ 에서 $a>0$, $b^2-4ac>0$ 일 때, y 의 최댓값, 최솟값에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 최댓값, 최솟값이 없다.
② 최솟값이 양수이다.
③ 최솟값이 음수이다.
④ 최댓값이 양수이다.
⑤ 최댓값이 음수이다.

해설

아래로 볼록하고, x 축과 두 점에서 만나므로 최솟값은 음수이다.

31. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4a - 4$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 4a - 4 = (x - a)^2 - a^2 + 4a - 4$

이므로 $x = a$ 일 때 최솟값 $-a^2 + 4a - 4$ 를 가진다.

$\therefore m = -a^2 + 4a - 4 = -(a - 2)^2$

따라서 m 은 $a = 2$ 일 때 최댓값 0 을 가진다.

32. 두 함수 $f(x) = |x-2| - 5$, $g(x) = x^2 + 6x + 8$ 에 대하여 $0 \le x \le 5$ 에서 $y = g(f(x))$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 라고 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = |x-2| - 5 = t$ 로 놓으면
$y = g(f(x)) = g(t) = t^2 + 6t + 8 = (t+3)^2 - 1$
그런데 $0 \le x \le 5$ 에서 $-5 \le t \le -2$ 이므로
y 의 값은 $t = -5$ 일 때 최대이고 최댓값은 3,
$t = -3$ 일 때 최소이고 최솟값은 -1 이다.
$\therefore M = 3,\ m = -1$
$\therefore M + m = 2$

33. $x+y=3,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

준식 $y=-x+3$ 에서 $x \geq 0,\ y \geq 0$ 이므로
$y=-x+3 \geq 0 \ \rightarrow \ -x \geq -3 \ \rightarrow \ x \leq 3 \therefore \ 0 \leq x \leq 3 \ (\because \ x \geq 0)$
또 $2x^2+y^2 = 2x^2+(-x+3)^2 = 2x^2+x^2-6x+9 = 3x^2-6x+9$
완전 제곱식으로 바꾸면 $3(x^2-2x)+9 = 3(x-1)^2+6$
$\therefore x=1$ 일 때 최솟값 6 , $x=3$ 일 때 최댓값 18 $\therefore M-m=12$

34. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-2)x+a^2+a+2=0$의 두 실근을 α,β라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)$의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, a는 상수)

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

이차방정식 $x^2+(a-2)x+a^2+a+2=0$이
두 실근을 가져야 하므로
$D=(a-2)^2-4(a^2+a+2)=-3a^2-8a-4\geq 0$
$(3a+2)(a+2)\leq 0$
$\therefore -2\leq a\leq -\frac{2}{3}\cdots$ ㉠
근과 계수의 관계에서
$\alpha+\beta=-a+2,\ \alpha\beta=a^2+a+2$이므로
$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$
$=a^2+a+2+a-2+1$
$=a^2+2a+1=(a+1)^2$
따라서, $-2\leq a\leq -\frac{2}{3}$에서
$a=-1$일 때 최솟값 0,
$a=-2$일 때 최댓값 1을 가지므로
최댓값과 최솟값의 합은 1이다.

35. $x,\ y$ 가 실수일 때, $2x^2-8x+y^2+2y+6$ 의 최솟값은?

① -5　　② -3　　③ -1　　④ 1　　⑤ 3

해설

$2x^2-8x+y^2+2y+6$
$=2\left(x^2-4x\right)+\left(y^2+2y\right)+6$
$=2(x-2)^2+(y+1)^2-3$
$x,\ y$ 는 실수이므로 $(x-2)^2\geq 0$, $(y+1)^2\geq 0$
$\therefore 2x^2-8x+y^2+2y+6\geq -3$
따라서, $x=2,\ y=-1$ 일 때 최솟값은 -3 이다.

36. x, y 가 실수일 때, $2x^2-4x+y^2+6y+16$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$2x^2-4x+y^2+6y+16=2(x-1)^2+(y+3)^2+5$
이 때, x, y 가 실수이므로
$(x-1)^2\ge 0$, $(y+3)^2\ge 0$
$\therefore\ 2x^2-4x+y^2+6y+16\ge 5$
따라서 구하는 최솟값은 5 이다.

37. 두 실수 $x,\ y$ 가 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면

$y^2-2y+\left(x^2+2x-2\right)=0$

$x,\ y$ 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

$\frac{D}{4}=(-1)^2-\left(x^2+2x-2\right)\geq 0$

$x^2+2x-3\leq 0,\ \ (x+3)(x-1)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

38. x 에 대한 이차방정식 $x^2+4kx+5k^2-1=0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때, α 의 최댓값과 β 의 최솟값의 합을 구하여라. (단, $\alpha \geq \beta$ 이고, k 는 실수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 등식 $x^2+4kx+5k^2-1=0 \cdots\cdots$ ㉠ 을 k 에 대하여 정리하면
$5k^2+4xk+\left(x^2-1\right)=0 \cdots\cdots$ ㉡
㉡은 k 에 대한 이차방정식이고 k 가 실수이므로 실근을 갖는다.
따라서, 판별식 D 에 대하여
$\frac{D}{4}=(2x)^2-5\left(x^2-1\right) \geq 0$
$-x^2+5 \geq 0,\ x^2-5 \leq 0$
$\therefore -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \cdots\cdots$ ㉢
그런데 α, β 는 ㉠의 실근이므로 ㉢의 범위 안에 있어야 한다.
$\therefore -\sqrt{5} \leq \beta \leq \alpha \leq \sqrt{5}$
α 의 최댓값은 $\sqrt{5}$, β 의 최솟값은 $-\sqrt{5}$
따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 0

39. $yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 y 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면
$(y-1)x^2 + (y+1)x + y - 1 = 0$
(ⅰ) $y = 1$ 일 때, $2x = 0$
$\therefore x = 0$
(ⅱ) $y \neq 1$ 일 때, 이 식을 x 에 대한 이차방정식으로 보면 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.
$D = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$
$3y^2 - 10y + 3 \leq 0$
$(3y-1)(y-3) \leq 0$
$\therefore \frac{1}{3} \leq y \leq 3$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 y 의 최댓값은 3, 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이므로
최댓값과 최솟값의 곱은 $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ 이다.

40. x 가 실수일 때, $x^2+4y^2-8x+16y-4=0$ 을 만족하는 y 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： -5

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면

$x^2-8x+4y^2+16y-4=0$

이것은 x 에 대한 이차 방정식으로 볼 때

x 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$\therefore\ D/4=(-4)^2-(4y^2+16y-4)\geq 0$

$\to\ 4y^2+16y-20\leq 0$

$\to\ y^2+4y-5\leq 0$

$\to\ (y+5)(y-1)\leq 0$

$\therefore\ -5\leq y\leq 1$

$\therefore\ y$ 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -5

41. 1200 명이 들어갈 수 있는 어느 소극장에서 입장권을 6000 원에 팔면 평균 600 명의 관중이 입장한다. 시장조사에 의하면, 입장료를 500 원씩 내리면 100 명씩 더 온다고 조사가 되었다. 이 때, 수입을 최대로 하기 위한 입장권의 가격은?

① 3000 원　② 3500 원　③ 4000 원

④ 4500 원　⑤ 5000 원

해설

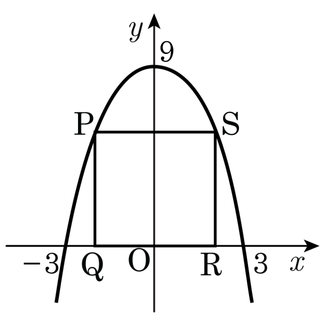
수입을 $f(x)$ 라고 하면,

$$\begin{aligned} f(x) &= (6000-500x)(600+100x) \\ &= -50000x^2+300000x+3600000 \\ &= -50000(x-3)^2+4050000 \end{aligned}$$

$x=3$ 일 때 최대이다.

즉, (입장권 가격)$= 6000-500\times 3 = 4500$ 원.

42. 다음의 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 에 내접하는 직사각형 PQRS 가 있다. PQRS 의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.



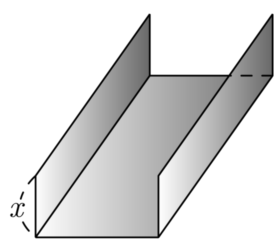
▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

먼저 이차함수의 식을 구하면
$(0, 9)$ 를 지나므로 $y = mx^2 + 9$,
$(3, 0)$ 을 지나므로 $y = -x^2 + 9$
$\mathrm{R}(a, 0)$ 이라 하면 (단, $0 < a < 3$), $\mathrm{S}(a, -a^2 + 9)$
직사각형의 가로는 $2a$, 세로는 $-a^2 + 9$
둘레는 $2\{2a + (-a^2 + 9)\} = -2(a - 1)^2 + 20$
따라서 둘레의 최댓값은 20

43. 다음 그림과 같이 폭이 20 cm 인 양철판을 구부려서 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대일 때, x의 값은?



① 4 cm ② 5 cm ③ 6 cm ④ 7 cm ⑤ 8 cm

해설

단면의 세로의 길이를 x cm 라 하면
가로의 길이는 $(20-2x)$ cm
단면의 넓이를 S m^2 라 하면
$S = x(20-2x) = -2x^2 + 20x$
$= -2(x-5)^2 + 50 \ (0 < x < 10)$
따라서 $x = 5(\mathrm{cm})$ 일 때,
S 는 최댓값 $50\,\mathrm{m}^2$ 를 갖는다.

44. $-1 \le x \le 1$ 에서 함수 $y=(x^2+2x)^2-4(x^2+2x)+2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$x^2+2x=t$ 로 놓으면, $t=(x+1)^2-1$ 이므로
$-1 \le x \le 1$ 에서 $-1 \le t \le 3$
이 때, 주어진 함수는 $y=t^2-4t+2=(t-2)^2-2$
즉, $t=2$ 일 때, y 의 최솟값은 -2 이고,
$t=-1$ 일 때, y 의 최댓값은 7 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.

45. 함수 $f(x)=(x^2-4x+2)^2-4(x^2-4x+2)$ 일 때, $0 \le x \le 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$f(x)=(x^2-4x+2)^2-4(x^2-4x+2)$
$t=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$ 라 하면
$0 \le x \le 3$ 에서 $-2 \le t \le 2$
$f(t)=t^2-4t=(t-2)^2-4$
$\therefore\ -2 \le t \le 2$ 에서 $-4 \le f(t) \le 12$
따라서 $0 \le x \le 3$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 -4 이다.

46. x, y 가 실수일 때, $f(x,\ y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -5

해설

$$
\begin{aligned}
f(x,\ y) &= x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y \\
&= x^2 - 2(y-1)x + 2y^2 + 2y \\
&= \{x - (y-1)\}^2 + (y+2)^2 - 5
\end{aligned}
$$

따라서 $x = -3$, $y = -2$ 일 때, 최솟값 -5