

1. 중심이 $(2, -1)$ 이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원의 방정식은?

① $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$

② $(x+2)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{5}$

③ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$

④ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{5}$

⑤ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5^2$

해설

중심이 $(2, -1)$, $r : \sqrt{5}$ 인 원

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

2. 방정식 $2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$ 은 원을 나타낸다. 반지름의 길이를 구하면?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 4 ③ $\sqrt{2}$ ④ 1 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 3 &= 0 \\ \Rightarrow 2(x^2 + 2x + 1 - 1) + 2(y^2 - 2y + 1 - 1) + 3 &= 0 \\ \Rightarrow 2(x + 1)^2 + 2(y - 1)^2 &= 1 \\ \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 &= \frac{1}{2} \\ \therefore \text{반지름 길이 } \sqrt{\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

3. 세 점 P (−1, −1), Q (1, 1), R (0, 1)을 지나는 원의 방정식을 구하면?

- ① $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$
- ② $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 4 = 0$
- ③ $x^2 + y^2 + x - 4y - 5 = 0$
- ④ $x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0$
- ⑤ $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2 = 0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓으면
이 원이 세 점 P (−1, −1), Q (1, 1), R (0, 1) 을 지나므로
이 점을 차례로 대입하면
 $(-1)^2 + (-1)^2 + A \cdot (-1) + B \cdot (-1) + C = 0$
 $\therefore A + B - C = 2 \cdots \textcircled{1}$
 $1^2 + 1^2 + A \cdot 1 + B \cdot 1 + C = 0$
 $\therefore A + B + C = -2 \cdots \textcircled{2}$
 $0^2 + 1^2 + A \cdot 0 + B \cdot 1 + C = 0$
 $\therefore B + C = -1 \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면
 $A = -1, B = 1, C = -2$
따라서, 구하는 원의 방정식은
 $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$

4. 중심이 직선 $y = x + 1$ 위에 있고 두 점 $(1, 6)$, $(-3, 2)$ 를 지나는 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

중심이 $y = x + 1$ 위에 있고,
중심의 좌표가 (a, b) 이므로 $b = a + 1$
따라서 $(a, a + 1)$ 이라 할수 있다.
중심과 $(1, 6)$, $(-3, 2)$ 간의 거리가 반지름으로 같으므로
$$\sqrt{(a-1)^2 + (a+1-6)^2}$$
$$= \sqrt{(a+3)^2 + (a+1-2)^2}$$
양변을 제곱하여 정리하면
$$(a-5)^2 = (a+3)^2$$
$$16a = 16$$
$$\therefore a = 1$$
$$\therefore (a, b) = (1, 2)$$
따라서 $a + b = 1 + 2 = 3$

5. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\quad \quad \quad), k < (\quad \quad \quad)$

▶ 답 :

▶ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$
또한, 준식을 표준형으로 나타내면,
 $x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서
 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - k$
여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

6. a 를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + 8a - 15 = 0$ 의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x+a)^2 + (y-a)^2 &= 2a^2 - 8a + 15 \\ &= 2(a-2)^2 + 7 \\ &= (\text{반지름})^2\end{aligned}$$

따라서 $a = 2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a, a) = (-2, 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

7. x 축에 접하고 두 점 $(3, 1)$, $(-4, 8)$ 을 지나는 원 중, 반지름의 크기가 큰 원의 방정식을 구하면?

- ① $(x-3)^2 + (y-12)^2 = 169$ ② $x^2 + (y-5)^2 = 169$
③ $x^2 + (y-5)^2 = 25$ ④ $(x-8)^2 + (y-13)^2 = 169$
⑤ $(x-8)^2 + (y-13)^2 = 25$

해설

구하는 원의 중심을 (a, b) 라고 하면
 x 축에 접하는 원의 방정식은
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$
이 원이 두 점 $(3, 1)$, $(-4, 8)$ 을 지나므로
 $(3-a)^2 + (1-b)^2 = b^2 \dots\dots ㉠$
 $(-4-a)^2 + (8-b)^2 = b^2 \dots\dots ㉡$
㉠ - ㉡에서
 $b = a + 5 \dots\dots ㉢$
㉢을 ㉠에 대입하면
 $a^2 - 8a = a(a-8) = 0$
 $\therefore a = 0$ 또는 $a = 8$
㉢에서 $a = 0$ 일 때 $b = 5$, $a = 8$ 일 때 $b = 13$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2 + (y-5)^2 = 5^2$
또는 $(x-8)^2 + (y-13)^2 = 13^2$

8. 중심이 직선 $3x + y = 12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a, b) 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

중심의 좌표는 (r, r) 이다.

따라서, 구하는 원의 방정식을

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, 점 (r, r) 는 직선 $3x + y = 12$ 위에 있으므로 $3r + r = 12$

$$\therefore r = 3$$

따라서, 구하는 원의 방정식은 $\textcircled{1}$ 에서 $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$

9. 두 정점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 1 : 2 인 점 P 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은 3 이다.
㉡ $\angle PBA$ 의 최대 크기는 60° 이다.
㉢ 점 P 의 자취의 길이는 4π 이다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 정점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 1 : 2 인 점 P 의 자취는

(0,0) 과 (-4,0) 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다. 따라서 이 원은 $(x+2)^2 + y^2 = 4$ 로 나타낼 수 있다.

삼각형 밑변의 길이가 정해져있으므로 높이가 최대일 때 삼각형의 넓이도 최대가 된다.

따라서 원의 반지름인 2 가 높이일 때의 넓이인 3 이 최댓값이다.

$\angle PBA$ 의 최대 크기는 점 P 가 원에 접할 때이므로 $\sin(\angle PBA) =$

$$\frac{2}{2 - (-2)} = \frac{1}{2} \text{ 에서}$$

$$\angle PBA = 30^\circ$$

점 P 의 자취의 방정식은 $(x+2)^2 + y^2 = 4$ 이므로 둘레의 길이는 4π 이다

10. 점 $A(6, 0)$ 와 원 $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$ 위의 점 P 를 잇는 선분 AP 를 1 : 2로 내분하는 점 Q 의 자취의 방정식을 구하면?

① $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

② $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2$

③ $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$

④ $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$

⑤ $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$

해설

$$\text{원 } (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$$

$P(\alpha, \beta)$, $Q(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP}$ 를 1 : 2로 내분한 점

$$Q(x, y) \text{는 } Q\left(\frac{\alpha + 12}{3}, \frac{\beta}{3}\right)$$

$$\therefore x = \frac{\alpha + 12}{3}, y = \frac{\beta}{3} \dots\dots\dots ①$$

그런데 점 $P(\alpha, \beta)$ 는 원 위의 점이므로

$$(\alpha + 3)^2 + (\beta - 3)^2 = 9 \dots\dots\dots ②$$

$$①, ② \text{에서 구하는 자취는 } (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$$