1. 다음은 원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $y=2x+k$ 가 서로 만나지 않을 때, k 의 값의 범위를 구하는 과정이다. (가), (나), (다) 에 들어갈 알맞은 것을 고르면?

$x^2+y^2=1 \cdots$ ㉠
$y=2x+k \cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하여 식을 정리하면
$5x^2+4kx+k^2-1=0 \cdots$ ㉢
㉠과 ㉡이 서로 만나지 않으려면
$D=(4k)^2-4\cdot 5\cdot(k^2-1)$
(가)0
k^2(나)5 ∴ (다)

① (가):> , (나):< , (다):$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

② (가):= , (나):= , (다):$k=\pm\sqrt{5}$

③ (가):> , (나):< , (다):$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

④ (가):> , (나):> , (다):$k>\sqrt{5}$ 또는 $k<-\sqrt{5}$

⑤ (가):< , (나):> , (다):$k>\sqrt{5}$ 또는 $k<-\sqrt{5}$

해설

(가): 원과 직선이 만나지 않으면 판별식이 0보다 작다.
(나): 판별식을 정리하면, $k^2>5$
(다): $k^2-5>0 \Rightarrow k>\sqrt{5}$ 또는 $k<-\sqrt{5}$

2. 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 접하려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.
$\Rightarrow$ 중심 : $(0,\ 0)$ 직선 : $x + y - k = 0$

$$\frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ $k = \pm 2$

$\therefore$ $k = -2$ ($\because$ $k < 0$)

3. 원 $x^2+y^2=4$ 과 직선 $y=2x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$ ② $-3\sqrt{5}<k<3\sqrt{5}$

③ $-4\sqrt{5}<k<4\sqrt{5}$ ④ $k<-\sqrt{5}$ 또는 $k>\sqrt{5}$

⑤ $k<-2\sqrt{5}$ 또는 $k>2\sqrt{5}$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 는

$$d=\frac{|0+0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 2 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}}<2 \quad \therefore -2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$$

4. 직선 $y=-2x+a$가 원 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a의 값은 ?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

원 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 에서
$(x-2)^2+(y-1)^2=1$
직선 $y=-2x+a$ 가 원의 중심 $(2,\ 1)$ 을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로
$a=2\times2+1=5$

5. $x^2+y^2=5$ 밖의 한 점 $(-1,3)$ 에서 이 원에 접선을 그을 때, 점 $(-1,3)$ 에서 접점까지의 거리를 구하여라.

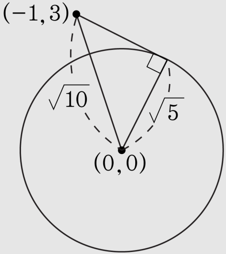
▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{5}$

해설

접선의 길이를 구하는 것이므로

$\sqrt{1^2+(-3)^2-5}=\sqrt{5}$



6. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ 2)$ 에서의 접선의 방정식은?

① $x+y=3$ ② $2x-y=0$ ③ $x-2y=-3$

④ $2x+y=4$ ⑤ $x+2y=5$

해설

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$1\cdot x+2\cdot y=5$

$\therefore\ x+2y=5$

7. 기울기가 -1 이고, 원 $x^2+y^2=4$ 에 접하는 직선의 방정식은?

① $y=-x\pm 2$ ② $y=-x\pm 3$ ③ $y=-x\pm 4$

④ $y=-x\pm 2\sqrt{2}$ ⑤ $y=-x\pm 4\sqrt{2}$

해설

구하는 직선의 기울기는 -1 이므로

$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$ 에서

$y=-x\pm 2\sqrt{1+1}$

$\therefore\ y=-x\pm 2\sqrt{2}$

8. 다음 중에서 점 $(2, 4)$ 를 지나고, 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선의 방정식을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $x = 2$　　㉡ $y = 4$

㉢ $3x + 4y + 10 = 0$　　㉣ $3x - 4y + 10 = 0$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉣　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉢, ㉣

해설

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 으로 놓으면
접선의 방정식은
$x_1x + y_1y = 4 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(2, 4)$ 를 지나므로
$2x_1 + 4y_1 = 4,\ x_1 + 2y_1 = 2 \cdots\cdots$ ㉡
또, 접점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로
$x_1^2 + y_1^2 = 4 \cdots\cdots$ ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$x_1 = 2, y_1 = 0$ 또는 $x_1 = -\dfrac{6}{5}, y_1 = \dfrac{8}{5}$
이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$x = 2$ 또는 $3x - 4y + 10 = 0$

9. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

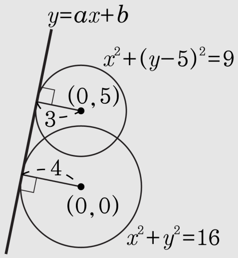
$$x^2+y^2=16,\quad x^2+(y-5)^2=9$$

① $y=\pm\sqrt{6}x+10$ ② $y=\pm2\sqrt{6}x+20$

③ $y=\pm3\sqrt{6}x+30$ ④ $y=\pm4\sqrt{6}x+40$

⑤ $y=\pm5\sqrt{6}x+50$

해설



$x^2+y^2=16 \cdots\cdots$ ㉠,
$x^2+(y-5)^2=9 \cdots\cdots$ ㉡
공통접선의 방정식을
$y=ax+b \cdots\cdots$ ㉢ 로 놓는다.
이때, 원 ㉠과 직선 ㉢이 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=4$$

$\therefore |b|=4\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉣
또, 원 ㉡과 직선 ㉢도 접하므로

$$\frac{|-5+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=3$$

$\therefore |b-5|=3\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉤
그런데 $b\neq0$ 이므로 ㉤ ÷ ㉣을 하면

$$\frac{|b-5|}{b}=\frac{3}{4}$$

$4|b-5|=3|b|,\ 4(b-5)=\pm3b$

$\therefore b=20$ 또는 $b=\frac{20}{7}$

(i) $b=20$ 일 때, ㉣에서 $\sqrt{a^2+1}=5$
$\therefore a=\pm2\sqrt{6}$

(ii) $b=\frac{20}{7}$ 일 때, ㉣에서

$\sqrt{a^2+1}=\frac{5}{7}$ 이고,

이것을 만족하는 실수 a 는 없다.
(i), (ii) 로부터 $a=\pm2\sqrt{6}, b=20$ 이므로
구하는 공통접선의 방정식은
$y=\pm2\sqrt{6}x+20$

10. 점 A(0, a)에서 원 $x^2+(y-3)^2=8$에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 a의 값은?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 10

해설

점 A(0, a)을 지나고 기울기가 m인 접선을 $y=mx+a$로 놓으면 원의 중심 (0, 3)에서 접선 $mx-y+a=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,

$(a-3)^2=8(m^2+1)$

$8m^2-a^2+6a-1=0$

m에 관한 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면,

두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta=-1$ 이어야 하므로

$$\frac{-a^2+6a-1}{8}=-1$$

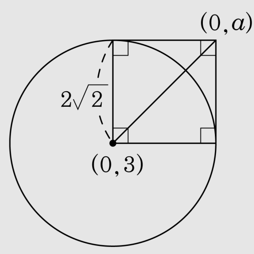
$a^2-6a-7=0,\quad (a-7)(a+1)=0$

$\therefore\ a=7\ (\because a>0)$

해설

원의 중심 (0, 3)에서 A(0, a)까지의 거리는

반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 대각선의 길이와 같다. $\sqrt{0+(a-3)^2}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$



$a-3=\pm4$

$\therefore\ a=7$ 또는 $a=-1$

그런데 $a>0$ 에서 $a=7$