1. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-2}} = -\sqrt{\dfrac{a}{a-2}}$ 를 만족하는 실수 a 에 대하여 $|a-2|+|a|$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ $(a < 0, b \geq 0)$

$\therefore a \geq 0,\ a-2 < 0 \Rightarrow 0 \leq a < 2$

$\therefore |a-2|+|a| = -(a-2)+a = 2$

2. $\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$은 자연수이다. 이 때, 각 자리의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x = 21$이라 하면

$\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$

$= \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$

$= \sqrt{\{x(x+3)\}(x+1)(x+2)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1}$

$= \sqrt{\{(x^2+3x)+1\}^2}$

$= x^2+3x+1 \ (\because (x^2+3x)+1>0)$

$= 21^2+3 \cdot 21+1 = 505$

각자리 숫자의 합은 $5+0+5=10$

3. 자연수 $N = 5 \cdot 29^3 + 15 \cdot 29^2 + 15 \cdot 29 + 5$ 의 양의 약수의 개수는?

① 20 개　　② 40 개　　③ 60 개

④ 80 개　　⑤ 100 개

해설

주어진 N 의 값을 직접 계산하여 다시 소인수분해 하기는 너무 복잡하므로,
주어진 수들을 하나의 문자로 생각하여 5로 묶으면

$N = 5(29^3 + 3 \cdot 29^2 + 3 \cdot 29 + 1)$

$= 5(29+1)^3$

$= 5 \cdot 30^3$

$= 5 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^3$

$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4$

따라서 N 의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(3+1)(4+1) = 80$

4. 복소수 z 에 대하여 $f(z) = z\bar{z}$ ($\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수) 라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (w 는 복소수)

보기

㉠ $f(z) \geqq 0$

㉡ $f(z+w) = f(z) + f(w)$

㉢ $f(zw) = f(z)f(w)$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢

④ ㉠, ㉡　⑤ ㉠, ㉢

해설

㉠ $z = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 라 하면
$f(z) = z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \geqq 0$

㉡ $f(z+w) = (z+w) \cdot (\overline{z+w}) = (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w})$
$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$
$\neq z\bar{z} + w\bar{w} = f(z) + f(w)$

㉢ $f(zw) = zw \cdot (\overline{zw}) = zw \cdot \bar{z}\ \bar{w}$
$= z\bar{z} \cdot w\bar{w} = f(z)f(w)$

5. 서로 다른 두 복소수 x, y 가 $x^2 - y = i,\ y^2 - x = i$ 를 만족할 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $2 - 3i$

해설

$x^2 - y = i \cdots$ ①, $y^2 - x = i \cdots$ ② 에서

① - ② 하면 : $(x+y)(x-y) + (x-y) = 0$,

$(x-y)(x+y+1) = 0$

조건에서 $x \neq y$ 이므로 $x + y = -1$ 이다.

① + ②하면 $x^2 + y^2 - x - y = 2i$

식을 변형하면 $(x+y)^2 - 2xy - (x+y) = 2i$

$\therefore\ xy = 1 - i$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= (-1)^3 - 3(1-i)(-1) \\ &= 2 - 3i \end{aligned}$$

6. 복소수 z가 $z^2 = \bar{z}$일 때, z이 될 수 있는 수들의 합을 구하여라.(단, $\bar{z}$는 z 의 켤레복소수이다.)

① -2　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$z = a + bi$ (단, a, b 는 실수) 라 하면
$z^2 = \bar{z}$ 에서 $(a + bi)^2 = a - bi$
$\therefore a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$
$a^2 - b^2 = a, 2ab = -b$
$\therefore b = 0$ 또는 $a = -\frac{1}{2}$
i) $b = 0$ 일 때 : $a^2 = a \therefore a = 0$ 또는 $a = 1$
ii) $a = -\frac{1}{2}$일때 : $\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2}$　　$\therefore b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\therefore\ z = 0,\ 1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
따라서 모든 z의 합은 0 이다.