1. $\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}$ 를 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① $\frac{6}{5}$ ② 2 ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

해설

$$\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2-i)^2+(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}$$
$$=\frac{3+3}{5}=\frac{6}{5}$$

2. $x = 1998,\ y = 4331$ 일 때, $\frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$\frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi}$

$= \frac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$

$= \frac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{(y-xi)(x+yi)} = 0$

3. 이차방정식 $x^2 + (a+2)x + 1 = 0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면
$D = (a+2)^2 - 4 = 0$이므로
$a^2 + 4a + 4 - 4 = a^2 + 4a = 0$
따라서 $a = 0$또는 $a = -4$
따라서 상수 a의 값의 합은 -4

4. $-1 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x - 2a$ 의 최솟값이 1 일 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 4x - 2a = (x-2)^2 - 2a - 4$
이 때, 꼭짓점의 x 좌표 2 가 $-1 \le x \le 1$ 에 속하지 않으므로
$f(-1), f(1)$ 중 작은 값이 최솟값이다.
따라서, 최솟값은 $f(1) = -3 - 2a = 1$
$\therefore a = -2$

5. 연립방정식 $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z+3}{5} \\ x+2y+3z=7 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=3$

▷ 정답 : $y=-1$

▷ 정답 : $z=2$

해설

$\frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3}$ 에서

$3x+2y=7 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\frac{x-1}{2} = \frac{z+3}{5}$ 에서

$5x-2z=11 \quad \cdots\cdots ㉡$

$x+2y+3z=7 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉠ − ㉢을 하면 $2x-3z=0 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉡ × 3 − ㉣ × 2를 하면 $11x=33$

$\therefore\ x=3$ 이것을 ㉠, ㉡에 대입하면

$y=-1,\ z=2$

6. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y+z=12 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+2z=5 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$, $z=c$라 할 때, abc 의 값은?

① -14 ② -7 ③ 0 ④ 7 ⑤ 14

해설

$\begin{cases} 2x+y+z=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2y+z=3 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+y+2z=5 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠ + ㉡ + ㉢을 하면 $4(x+y+z)=20$

$\therefore\ x+y+z=5 \ \cdots\cdots$ ㉣

㉠ − ㉣ 에서 $x=7$

㉡ − ㉣ 에서 $y=-2$

㉢ − ㉣ 에서 $z=0$

$\therefore\ a=7,\ b=-2,\ c=0$

$\therefore\ abc=0$

7. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+x=A$ 로 치환하면
$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$
$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$
$=(A-2)(A-12)+24$
$=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$
$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$
$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$
$\therefore\ a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10$

8. 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라. (a, b, c, d는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2 \\
&= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2 \\
&= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ a + b + c + d = 4$

9. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2a$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B 에서 만나고 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\mathrm{A}(\alpha,\ 0),\ \mathrm{B}(\beta,\ 0)(\alpha < \beta)$ 이라 하면
α, β 는 이차방정식 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = -a,\ \alpha\beta = 2a \quad \cdots ㉠$
이 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 이므로
$\beta - \alpha = 2$ 양변을 제곱하면
$(\beta - \alpha)^2 = 4$
$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 \quad \cdots ㉡$
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $a^2 - 8a - 4 = 0$
따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 8 이다

10. 두 개의 곡선 $y = ax^2 + bx + 8$, $y = 2x^2 - 3x + 2$ 의 두 교점을 연결하는 직선이 $y = -x + 6$ 일 때, 상수 a, b 의 값을 구하면?

① $a = -1,\ b = -1$
② $a = -1,\ b = 0$
③ $a = 1,\ b = 0$
④ $a = 1,\ b = -1$
⑤ $a = 0,\ b = 1$

해설

$y = ax^2 + bx + 8 \quad \cdots ①$
$y = 2x^2 - 3x + 2 \quad \cdots ②$
$y = -x + 6 \quad \cdots ③$
두 교점을 ①, ②, ③이 모두 지나므로
②, ③의 교점을 ①이 지난다고 생각해도 좋다.
②, ③을 연립하여 풀면
교점은 $(2,\ 4)$, $(-1,\ 7)$ 이고,
이 두 점을 곡선 ①이 지나므로
$4a + 2b + 8 = 4,\ a - b + 8 = 7$
$\therefore\ a = -1,\ b = 0$

11. 두 방정식 $ax-6y-2=0$,
$2x-(2a-5)y-1=0$에 대하여,
두 방정식을 동시에 만족하는 x가 없도록 a의 값을 정하면 ?

① $-\frac{3}{2}$　　② -5　　③ 3　　④ 2　　⑤ 1

해설

$\frac{a}{2}=\frac{6}{2a-5}\neq\frac{2}{1}$에서 $a(2a-5)=12$,
$2a^2-5a-12=0$,
$(2a+3)(a-4)=0$,
$\therefore\ a=-\frac{3}{2},\ 4$
$\therefore\ a=-\frac{3}{2}$

12. 부등식 $(a-b)x+(b-2a)>0$의 해가 $x>\frac{3}{2}$일 때, 부등식 $ax^2+(a+2b)x+(a+3b)<0$의 해를 구하면?

① $3<x<7$ ② $-3<x<1$ ③ $x<2,\ x>3$

④ $-1<x<2$ ⑤ $x<-2,\ x>4$

해설

$(a-b)x>2a-b$의 해가 $x>\frac{3}{2}$이려면

$a-b>0,\ \frac{2a-b}{a-b}=\frac{3}{2}$이어야 한다.

$\therefore\ a=-b,\quad b<0$

준 부등식 $-bx^2+bx+2b<0$에서

$x^2-x-2<0,\ (x-2)(x+1)<0$

$\therefore\ -1<x<2$

13. 이차부등식 $(x+1)^2 \leq k(x^2-x+1)$ 이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때, 실수 k의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(x+1)^2 \leq k(x^2-x+1)$

$(k-1)x^2-(k+2)x+k-1 \geq 0$

모든 x에 대해 성립하려면,

$k-1>0$, 판별식이 0보다 작거나 같다

$D=(k+2)^2-4(k-1)(k-1) \leq 0$에서

$\{(k+2)-2(k-1)\}\{(k+2)+2(k-1)\}$

$=(-k+4)k \leq 0$

$\therefore\ k(k-4) \geq 0, \quad k \leq 0$ 또는 $k \geq 4$

$\therefore\quad k \geq 4(\because k>1) \quad \therefore$최솟값 : 4

14. 좌표 평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx+1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 0　　⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여 부등식
$2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠이
항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0 \cdots$ ㉡식이
항상 성립하기 위하여
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$
$\Rightarrow k^2 - 4k - 1 < 0$
$\therefore 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

15. 실수 x가 $x^2-3x+1=0$을 만족할 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값을 구하면?

① 18　② 19　③ 20　④ 21　⑤ 22

해설

준식의 양변을 x로 나누면

$x+\dfrac{1}{x}=3$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=3^3-3\times3=18$$

16. 3차 이하의 다항식 $f(x)$에 대하여
$\dfrac{f(x)}{x(x-1)(x-2)(x-3)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x-2} + \dfrac{d}{x-3}$가 성립할 때, 다음 중 d와 같은 것은? (단, a, b, c, d는 실수이다.)

① $f(0)$　② $f(1)$　③ $\dfrac{f(2)}{2}$　④ $\dfrac{f(3)}{6}$　⑤ 0

해설

준 식을 정리하면
$f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + bx(x-2)(x-3) + cx(x-1)(x-3) + dx(x-1)(x-2)$
$x = 3$일 때,
$f(3) = d \cdot 3(3-1)(3-2)$
$\therefore\ d = \dfrac{f(3)}{6}$

17. 다항식 $f(x)$를 $ax+b(a \neq 0)$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 한다. $xf(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나눈 나머지를 구하면 ?

① $\frac{bR}{a}$ ② $\frac{b}{Ra}$ ③ $-\frac{b}{a}R$ ④ $\frac{aR}{b}$ ⑤ $-\frac{aR}{b}$

해설

$f(x)=(ax+b)Q(x)+R$

$\quad =a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$

$\therefore\ x\cdot f(x)$

$=ax\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+Rx$

$=ax\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R\left(x+\frac{b}{a}\right)-\frac{b}{a}R$

$=\left(x+\frac{b}{a}\right)\{axQ(x)+R\}-\frac{b}{a}R$

따라서, 구하는 몫은 $axQ(x)+R$

나머지는 $-\frac{bR}{a}$

해설

$f(x)=(ax+b)Q(x)+R$에서

나머지 정리에 의해 $f(-\frac{b}{a})=R$

$x\cdot f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q'(x)+R'$이라 하면

나머지 정리에 의해 $-\frac{b}{a}f(-\frac{b}{a})=R'$

$f(-\frac{b}{a})=R$를 대입하면 $R'=-\frac{b}{a}R$

18. 이차방정식 $ax^2+(a-3)x-2a=0$의 두 근의 차가 $\sqrt{17}$이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

해설

$ax^2+(a-3)x-2a=0$의 두 근을 α, β라 하면,

$\alpha+\beta=-\frac{a-3}{a}$, $\alpha\beta=-2$

문제의 조건에서 $|\alpha-\beta|=\sqrt{17}$

$$\therefore\ 17=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=\left(\frac{a-3}{a}\right)^2+8$$

$$\therefore\ \left(\frac{a-3}{a}\right)^2=9,\ 8a^2+6a-9=0$$

따라서, a의 값들의 합은 $-\frac{3}{4}$

19. $a+b=1,\ a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{2000}+b^{2006}$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$a+b=1$ 에서 $b=1-a$ 이고 $a^2+b^2=-1$ 이므로
$a^2+(1-a)^2=-1,\ 2a^2-2a+2=0,\ a^2-a+1=0$
이 식의 양변에 $a+1$ 을 곱하면
$(a+1)(a^2-a+1)=0,\ a^3+1=0$
같은 방법으로 하면
$b^3+1=0$ 이므로 $a^3=-1,\ b^3=-1$

$$\begin{aligned} \therefore a^{2000}+b^{2006} &= (a^3)^{666}\cdot a^2+(b^3)^{668}\cdot b^2 \\ &= a^2+b^2=-1 \end{aligned}$$

20. 두 개의 이차방정식 $x^2+ax+\frac{1}{a}=0$과 $x^2+bx+\frac{1}{b}=0$이 공통근을 가질 때, $ab(a+b)$의 값은? (단, $a \neq b$)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ a, b의 값에 따라 달라진다.

해설

공통근을 α라 하고 두 식에 대입하면

$\alpha^2+a\alpha+\frac{1}{a}=0 \ \cdots\cdots$ ①

$\alpha^2+b\alpha+\frac{1}{b}=0 \ \cdots\cdots$ ②

① − ② 하면

$\therefore \ \alpha(a-b)+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0,\ (a-b)\left(\alpha-\frac{1}{ab}\right)=0$

$a \neq b$이므로 $\alpha=\frac{1}{ab}$

이것을 ①에 대입하면 $\left(\frac{1}{ab}\right)^2+a\cdot\frac{1}{ab}+\frac{1}{a}=0$

$1+a^2b+ab^2=1+ab(a+b)=0$

$\therefore \ ab(a+b)=-1$