

1. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k 의 값의 범위는?

① $k < 1$

② $1 < k < 3$

③ $k < 3$

④ $3 < k < 5$

⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

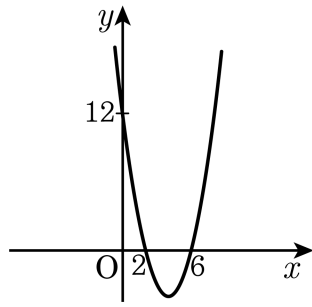
이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$$

$$k^2 - 6k + 5 > 0, (k-1)(k-5) > 0$$

$$\therefore k < 1 \text{ 또는 } k > 5$$

2. 다음은 이차함수 $y = (x - 2)(x - 6)$ 의 그래프이다.



이 이차함수가 x 축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{AB}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차방정식 $(x - 2)(x - 6) = 0$ 에서 $x = 2$ 또는 $x = 6$
따라서 A (2, 0), B (6, 0) 이므로 $\overline{AB} = 4$

3. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 2

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$$

이 때, a, b 가 실수이므로 $a+2=0, b-1=0$

따라서 $a=-2, b=1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5$$

4. 포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$ 일 때, 모든 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는
이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 두 근이므로 두 근을 α, β
라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = 2k, \alpha\beta = 2k + 3$
 $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{5}$ 에서 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로
 $20 = (2k)^2 - 4(2k + 3), 4k^2 - 8k - 12 = 20$

$$k^2 - 2k - 8 = 0$$

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k 의 값의 합은 2이다.

5. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않기 위한 정수 k 의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으려면

이차방정식 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때 $D < 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 9 < 0$$

$$k^2 - 2k - 8 < 0, \quad (k+2)(k-4) < 0$$

$$\therefore -2 < k < 4$$

따라서, k 값 중 정수인 것은 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

6. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$ 또는 $a > 1$

② $a < -2$ 또는 $a > 2$

③ $1 < a < -1$

④ $-2 < a < 2$

⑤ $a = -1$ 또는 $a = 1$

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가
 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$ 에서
판별식의 값은 양이다.
즉 $D = a^2 - 4 > 0$
 $\therefore a < -2$ 또는 $a > 2$

7. 포물선 $y = x^2 - 2x + 4k$ 의 그래프가 x 축과 서로 만나지 않을 때의 k 의 범위를 구하면?

① $k < \frac{1}{2}$

② $k < -\frac{1}{2}$

③ $k > \frac{1}{4}$

④ $k < \frac{1}{4}$

⑤ $k > -\frac{1}{4}$

해설

$y = x^2 - 2x + 4k$ 의 그래프가 x 축과

만나지 않으려면 판별식 D 가

$D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 1 - 4k < 0$$

$$\therefore k > \frac{1}{4}$$

8. 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 의 해가 $-3 \leq x \leq 2$ 이고 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 일 때, 함수 $y = f(3x - 2)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리는?

- ① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 의 해가 $-3 \leq x \leq 2$ 일 때 $a < 0$ 이고,
 $ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow a(x+3)(x-2) \geq 0$
 $\Leftrightarrow ax^2 + ax - 6a \geq 0$

$\therefore b = a, c = -6a$

따라서, $f(x) = ax^2 + ax - 6a$ 이므로

$f(x) = 0$ 의 두 근은 $-3, 2$ 이다.

즉, $f(-3) = 0$ 또는 $f(2) = 0$ 이다.

한편, 함수 $y = f(3x - 2)$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표는
방정식 $f(3x - 2) = 0$ 의 실근과 같으므로

$f(3x - 2) = 0$ 의 두 근은

$3x - 2 = -3$ 또는 $3x - 2 = 2$ 에서

$x = -\frac{1}{3}$ 또는 $x = \frac{4}{3}$

따라서, 구하는 두 점 사이의 거리는

$$\frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

9. 이차함수 $y = x^2 - ax + 3$ 의 그래프가 직선 $y = 0$ 과 두 점에서 만나기 위한 자연수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 3$ 의 그래프가 x 축 ($y = 0$)과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
즉 이차방정식 $x^2 - ax + 3 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면
 $D = a^2 - 12 > 0$ 에서
 $a < -2\sqrt{3}$ 또는 $a > 2\sqrt{3}$
따라서 자연수 a 의 최솟값은 4이다.

10. 직선 $y = x + 4$ 에 평행하고, 곡선 $y = -x^2 + 2$ 에 접하는 직선의 방정식은?

- ① $4x + 4y = 9$ ② $4x - 4y = 9$ ③ $-4x + 4y = 9$
④ $-4x - 4y = 5$ ⑤ $-4x - 4y = -5$

해설

직선 $y = x + 4$ 에 평행한 직선의 방정식을 $y = x + k$ 라 하면
이차방정식 $x + k = -x^2 + 2$,

즉 $x^2 + x + k - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

$$D = 1 - 4k + 8 = 0$$

$$\therefore k = \frac{9}{4}$$

따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = x + \frac{9}{4}$

$$\therefore -4x + 4y = 9$$

11. 이차함수 $y = x^2 + 6ax + 1$ 의 그래프가 직선 $y = 2x + 2a$ 보다 항상 위쪽에 있을 때, a 의 범위는?

① $0 < a < \frac{4}{9}$

② $\frac{1}{3} < a < 1$

③ $0 \leq a < 1$

④ $a < 0$ 또는 $a > \frac{4}{9}$

⑤ $a < \frac{1}{3}$ 또는 $a < 1$

해설

이차함수 $y = x^2 + 6ax + 1$ 의 그래프가 직선 $y = 2x + 2a$ 보다 항상 위쪽에 있으려면

$y = x^2 + 6ax + 1 - (2x + 2a)$ 의 판별식 $D/4 < 0$ 야 하므로

$$(3a - 1)^2 - 1 + 2a < 0$$

$$9a^2 - 4a < 0$$

$$a(9a - 4) < 0$$

$$0 < a < \frac{4}{9}$$

12. 이차함수 $y = x^2 - 6x + 12$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + k$ 가 만나기 위한 k 의 최솟값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

두 그래프가 만나려면 연립 방정식의 판별식이 0 보다 크거나 같아야 한다.

$$\Rightarrow 2x + k = x^2 - 6x + 12$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 - k = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4^2 - 12 + k \geq 0$$

$$\Rightarrow k \geq -4$$

$\therefore$ 최솟값 : -4

13. 직선 $y = 2x + k$ 가 이차함수 $y = -x^2 - 6x + 1$ 의 그래프와는 만나고, 이차함수 $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프와는 만나지 않을 때, 정수 k 의 개수는?

- ① 10 개 ② 12 개 ③ 14 개 ④ 16 개 ⑤ 18 개

해설

직선 $y = 2x + k$ 가
곡선 $y = -x^2 - 6x + 1$ 과 만날 때
 $2x + k = -x^2 - 6x + 1$ 에서
 $x^2 + 8x + k - 1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면
 $\frac{D_1}{4} = 16 - k + 1 \geq 0$ 에서 $k \leq 17$
직선 $y = 2x + k$ 가
곡선 $y = -x^2 + 4x$ 와 만나지 않을 때
 $2x + k = -x^2 + 4x$ 에서
 $x^2 - 2x + k = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면
 $\frac{D_2}{4} = 1 - k < 0$ 에서 $k > 1$
따라서 k 의 값의 범위는 $1 < k \leq 17$ 이므로
정수 k 의 개수는 16 개이다.

14. 이차함수 $y = x^2 + x - 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 이때, 정수 m 의 최댓값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

이차함수 $y = x^2 + x - 1$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 1 만큼,
 y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면
 $y - m = (x - 1)^2 + (x - 1) - 1$
 $\therefore y = x^2 - x - 1 + m$
이 함수의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식
 $x^2 - x - 1 + m = 0$ 에서
 $D = 1 - 4(-1 + m) > 0$
 $5 - 4m > 0 \quad \therefore m < \frac{5}{4}$
따라서 정수 m 의 최댓값은 1 이다.

15. 이차함수 $y = x^2 - px + q$ 의 그래프가 점 $(1, 1)$ 을 지나고, x 축과 단 한 점에서 만나도록 p, q 의 값을 정할 때, $p + q$ 의 값으로 가능한 수는?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$y = x^2 - px + q \cdots \textcircled{1}$ 의 그래프는

점 $(1, 1)$ 을 지나므로 $1 = 1 - p + q$

$\therefore p = q \cdots \textcircled{2}$

또, $\textcircled{1}$ 의 그래프가 x 축과 단 한 점에서 만나므로,

$\textcircled{1}$ 에서 $y = 0$ 으로 한 이차방정식

$x^2 - px + q = 0$ 은 중근을 갖는다.

따라서 판별식을 D 라 하면

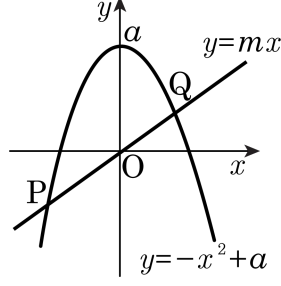
$D = p^2 - 4q = 0 \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 $p^2 - 4p = 0$

$\therefore p(p - 4) = 0 \quad \therefore p = 0, 4$

$\therefore p = 0, q = 0$ 또는 $p = 4, q = 4$

16. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = -x^2 + a$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5} - 1$ 일 때, $a + m$ 의 값을 구하여라. (단, a, m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = -x^2 + a$ 와 $y = mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2 + a = mx$ 의 근이다.

점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5} - 1$ 이므로

방정식 $x^2 + mx - a = 0$ 의 한 근이 $\sqrt{5} - 1$ 이다.

그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5} - 1$ 이다.

따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-m = (\sqrt{5} - 1) + (-\sqrt{5} - 1) = -2$$

$$-a = (\sqrt{5} - 1)(-\sqrt{5} - 1) = -4$$

$$\therefore a = 4, m = 2 \quad \therefore a + m = 6$$

17. $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2$ 와 $y = x$ 의 두 교점이 원점에 관하여 대칭이다. 이 때, a 의 값을 구하면?

① 4 ② 2 ③ -4 ④ -2 ⑤ 3

해설

$$y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2$$

$$y = x \text{ 의 교점은 } x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2 = x$$

$$x^2 - (a^2 - 4a + 4)x + a^2 + 2 = 0 \text{ 의 두 근을 } \alpha, \beta \text{ 라면}$$

두 근이 원점에 대칭이므로 중점은 원점이다.

$$\therefore \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{(a - 2)^2}{2} = 0$$

$$\therefore a = 2$$

18. 이차함수 $y = x^2 + 3x + 1$ 의 그래프와 직선 $y = -x + 3$ 의 두 교점의 좌표를 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 할 때, $y_1 y_2$ 의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

해설

두 교점의 x 좌표 x_1, x_2 는
방정식 $x^2 + 3x + 1 = -x + 3$ 의 실근이다.
 $x^2 + 4x - 2 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여
 $x_1 + x_2 = -4$, $x_1 x_2 = -2$
 $\therefore y_1 y_2 = (-x_1 + 3)(-x_2 + 3)$
 $= x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9$
 $= -2 + 12 + 9 = 19$

19. 이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표가 각각 $0, -3$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와

직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표 $0, -3$ 은

이차방정식 $ax^2 - (b+5)x - a - 2 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두근의합}) = 0 + (-3) = \frac{b+5}{a}$$

$$\therefore 3a + b = -5 \cdots \text{㉠}$$

$$(\text{두 근의 곱}) = 0 \cdot (-3) = \frac{-a-2}{a}$$

$$\therefore a = -2$$

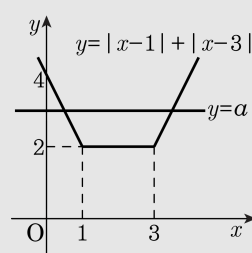
$$\text{㉠에서 } b = 1 \text{ 이므로 } a + b = -1$$

20. x 의 방정식 $|x-1| + |x-3| = a$ 가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < 1$ ② $a > 1$ ③ $a < 2$ ④ $a > 2$ ⑤ $a < 3$

해설

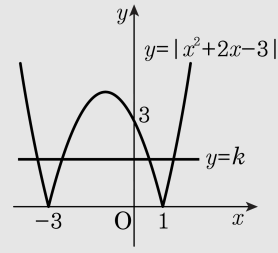
좌 우변을 각각 그래프를 그려보면
 $a > 2$



21. x 에 대한 방정식 $|x^2 + 2x - 3| = k$ 가 양의 근 2개와 음의 근 2개를 갖도록 하는 상수 k 의 값의 범위는?
- ① $k \geq 3$ ② $k > 4$ ③ $3 \leq k < 4$
④ $0 < k < 3$ ⑤ $0 < k < 4$

해설

방정식 $|x^2 + 2x - 3| = k$ 의 근은
두 함수 $y = |x^2 + 2x - 3|$, $y = k$ 의
그래프의 교점의 x 좌표와 같다.
따라서 그림에서 교점의 x 좌표가 양
수 2개,
음수 2개가 되려면 $0 < k < 3$

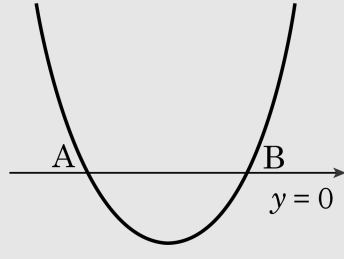


22. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$ 가 x 축과 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ 이 되도록 하는 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 6$

해설



A(α , 0) B(β , 0) 이라고 하면 ($\therefore \alpha < \beta$)

$$\alpha + \beta = -a$$

$\alpha\beta = a$ 이므로

$$(\therefore y = x^2 + ax + a)$$

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = a^2 - 4a$$

$$\overline{AB} = \beta - \alpha = 2\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$a^2 - 4a = 12$$

$$(a - 6)(a + 2) = 0$$

$$\therefore a = -2, 6$$

23. $y = 0$, $y = (k - 2)x^2 - 6(k - 1)x + 9k + 1$ 을 동시에 만족하는 (x, y) 가 2개일 때, 정수 k 의 최댓값은?

- ① 8
- ② 9
- ③ 10
- ④ 11
- ⑤ 12

해설

$y = (k - 2)x^2 - 6(k - 1)x + 9k + 1$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

이 때, 방정식 $(k - 2)x^2 - 6(k - 1)x + 9k + 1 = 0$ 은 이차방정식이어야 하므로 $k - 2 \neq 0$

$\therefore k \neq 2 \cdots \cdots \textcircled{\tiny ㉠}$

또, 이차방정식의 판별식을 D 라하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{3(k - 1)\}^2 - (k - 2)(9k + 1) > 0$$

$$9(k^2 - 2k + 1) - (9k^2 - 17k - 2) > 0$$

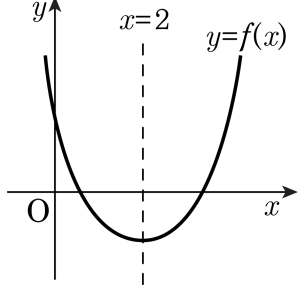
$$-k + 11 > 0$$

$\therefore k < 11 \cdots \cdots \textcircled{\tiny ㉡}$

①, ②에서 $k < 11$, $k \neq 2$

따라서, 정수 k 의 최댓값은 10이다.

24. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x 에 대한 방정식 $(f \circ f)(x) = 0$ 의 모든 실근의 합은? (단, $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

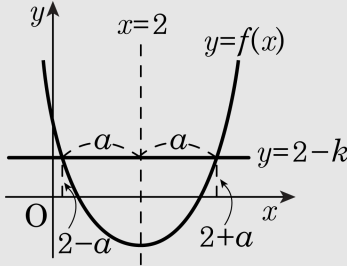
$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = t$ 로 놓으면

$f(t) = 0$ 을 만족시키는 두 실근은

$t = 2 - k$ 또는 $t = 2 + k$

($0 < k < 2$)로 놓을 수 있다.

$\therefore f(x) = 2 - k$ 또는 $f(x) = 2 + k$



(i) $f(x) = 2 - k$ 를 만족시키는 x 의 값은

$y = f(x)$ 의 그래프와

직선 $y = 2 - k$ 의 교점의 x 좌표이므로

$x = 2 - a$ 또는 $x = 2 + a$

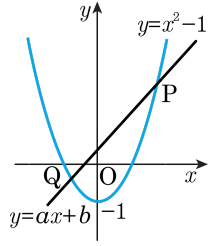
(ii) $f(x) = 2 + k$ 를 만족시키는 x 의 값도

마찬가지로 생각하면 $x = 2 - b$ 또는 $x = 2 + b$

따라서 $f(f(x)) = 0$ 을 만족시키는 모든 실근의 합은

$(2 - a) + (2 + a) + (2 - b) + (2 + b) = 8$

25. 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 가 다음 그림과 같이 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x 의 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 의 한 교점 P의 x 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 $1 + \sqrt{2}$ 는 이차방정식 $x^2 - 1 = ax + b$ 의 근이다.

$$(1 + \sqrt{2})^2 - 1 = a(1 + \sqrt{2}) + b$$

$$2 + 2\sqrt{2} = a + b + a\sqrt{2}$$

a, b 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2 = a + b, \quad 2 = a$$

$$\therefore a = 2, \quad b = 0$$

26. 이차함수 $y = -x^2 - 6x - 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 $2m$ 만큼 평행이동한 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 때, 정수 m 의 최솟값은?

- ① 2
- ② 1
- ③ 0
- ④ -1
- ⑤ -2

해설

$y = -x^2 - 6x - 3$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로
 $2m$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y - 2m = -(x - m)^2 - 6(x - m) - 3$
즉, $y = -x^2 + 2(m - 3)x - m^2 + 8m - 3$ 이
그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
 $\frac{D}{4} = (m - 3)^2 - m^2 + 8m - 3 > 0$
 $2m + 6 > 0$
 $\therefore m > -3$
따라서 정수 m 의 최솟값은 -2 이다.

27. $y = x^2 + (m-1)x + m$, $y = x$ 를 동시에 만족하는 (x, y) 가 없도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $4 - 2\sqrt{2} \leq m \leq 4 + 2\sqrt{2}$

② $4 - 2\sqrt{3} < m < 4 + 2\sqrt{3}$

③ $2 - 2\sqrt{3} < m < 2 + 2\sqrt{3}$

④ $m \leq 4 - 2\sqrt{2}$ 또는 $m \geq 4 + 2\sqrt{2}$

⑤ $m < 4 - 2\sqrt{3}$ 또는 $m > 4 + 2\sqrt{3}$

해설

두 함수 $y = x^2 + (m-1)x + m$, $y = x$ 의 그래프는 교점이 없어야 한다.

$$x^2 + (m-1)x + m = x,$$

$$x^2 + (m-2)x + m = 0 \text{ 에서}$$

$$D = (m-2)^2 - 4m < 0$$

$$m^2 - 8m + 4 < 0$$

$$\therefore 4 - 2\sqrt{3} < m < 4 + 2\sqrt{3}$$

28. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2x - 3 = m(x + 2)$ 가 $1 < x < 2$ 에서 적어도 한 개의 실근을 가질 때, 정수 m 의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$\begin{cases} y = x^2 = 2x - 3 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y = m(x + 2) \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

이라 하면 직선 $\textcircled{2}$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 0)$ 을 지난다.

이 때, 교점의 x 좌표가 1 과 2 사이에 존재해야 하므로

(i) 직선 $\textcircled{2}$ 이

점 $(1, 0)$ 을 지날 때

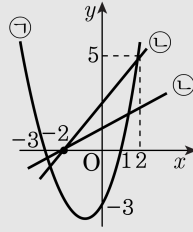
$$3m = 0 \quad \therefore m = 0$$

(ii) 직선 $\textcircled{2}$ 이 점 $(2, 5)$ 를 지날 때

$$4m = 5 \quad \therefore m = \frac{5}{4}$$

(i), (ii)에서 $0 < m < \frac{5}{4}$

따라서, 정수 m 의 값은 1 하나뿐이다.



29. 함수 $y = |x - 2| + 1$ 의 그래프가 직선 $y = mx + m$ 과 만나기 위한 양수 m 의 최솟값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

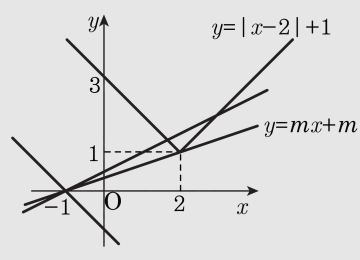
해설

$x \geq 2$ 일 때, $|x - 2| = x - 2$ 이므로

$$y = x - 2 + 1 = x - 1$$

$x < 2$ 일 때, $|x - 2| = -(x - 2)$ 이므로 $y = -x + 2 + 1 = -x + 3$

따라서, $y = |x - 2| + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



또, 직선 $y = mx + m = m(x + 1)$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 0)$ 을 지난다.

직선 $y = mx + m$ 이 점 $(2, 1)$ 을 지날 때, $1 = 2m + m \therefore m = \frac{1}{3}$

직선 $y = mx + m$ 이 직선 $y = -x + 3$ 과 평행할 때, $m = -1$

따라서, 직선 $y = mx + m$ 이 $y = |x - 2| + 1$ 의 그래프와 만나려면

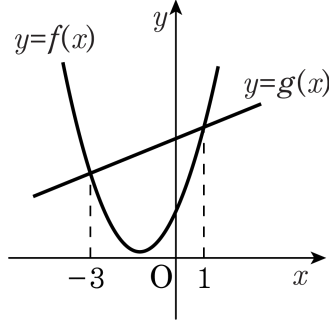
가울기 m 의 값의 범위가

$m \geq \frac{1}{3}$ 또는 $m < -1$ 이어야 한다.

그런데 양수 m 이므로 $m \geq \frac{1}{3}$ 그러므로 구하는 m 의 최솟값은 $\frac{1}{3}$

이다.

30. 아래 그림과 같이 두 함수 $f(x) = 2x^2 + ax + 4$, $g(x) = cx + d$ 의 그래프가 $x = 1$ 과 $x = -3$ 에서 만난다. 이 때, 함수 $y = f(x) - g(x)$ 의 최솟값은?



- ① -8 ② -6 ③ -4 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 함수를 연립하면,

$$\begin{aligned} 2x^2 + ax + 4 &= cx + d \\ \Rightarrow 2x^2 + (a - c)x + 4 - d &= 0 \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

근이 $-3, 1$ 이므로

$2(x + 3)(x - 1) = 0$ 과 일치한다.

$\textcircled{1}$ 과 비교하면 $a - c = 4, d = 10$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) - g(x) &= 2x^2 + (a - c)x + 4 - d \\ &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2(x + 1)^2 - 8 \end{aligned}$$

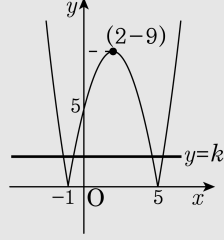
$\therefore$ 최솟값 : -8

31. x 에 대한 방정식 $|x^2 - 4x - 5| = k$ 가 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?
- ① $0 < k < 3$ ② $0 < k < 5$ ③ $3 < k < 5$
④ $1 < k < 4$ ⑤ $-2 < k < 5$

해설

방정식 $|x^2 - 4x - 5| = k$ 의 실근의 개수는 함수 $y = |x^2 - 4x - 5|$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 개수와 같다.

$$y = |x^2 - 4x - 5| = |(x + 1)(x - 5)| = |(x - 2)^2 - 9|$$



따라서 주어진 방정식이 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범위는 $0 < k < 5$

32. x 에 관한 방정식 $|x^2 - 1| - x - k = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $1 < k < \frac{5}{4}$ ② $1 \leq k \leq \frac{5}{4}$ ③ $-5 < k < -\frac{5}{4}$
 ④ $k < 1, k > \frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5} < k < 1$

해설

$|x^2 - 1| - x - k = 0$ 을 변형하여
 분리하면

$$|x^2 - 1| = x + k, y = |x^2 - 1|, y =$$

$$x + k$$

이 두 함수가 4개의 교점을 가지

려면

다음그림과 같아야 한다.

$$y = -x^2 + 1, y = x + k$$

두 점에서 만나야하므로

$x^2 + x + k - 1 = 0$ 의 판별식 $D > 0$ 이어야 한다.

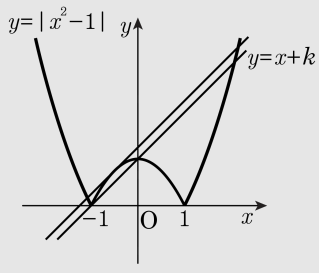
$$D = 1 - 4k + 4 > 0 \quad \therefore k < \frac{5}{4}$$

또, 직선 $y = x + k$ 는 점 $(-1, 0)$ 을 지나는 직선 위에 존재해야

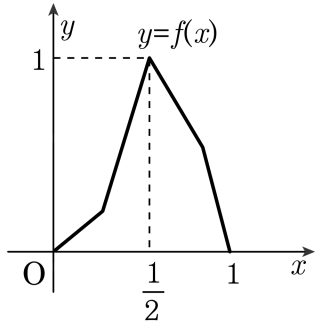
하므로

$$0 < -1 + k \quad \therefore k > 1$$

$$\therefore 1 < k < \frac{5}{4}$$

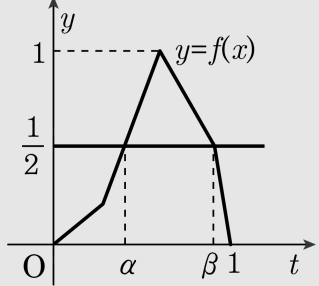


33. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $0 \leq x \leq 1$ 을 만족하는 방정식 $f(f(x)) = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개수는?

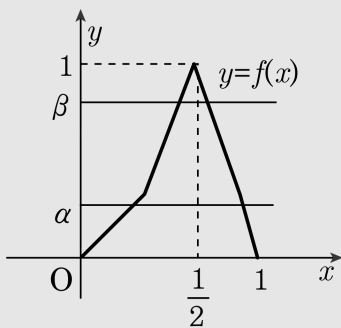


- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

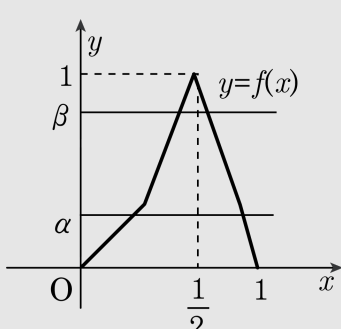
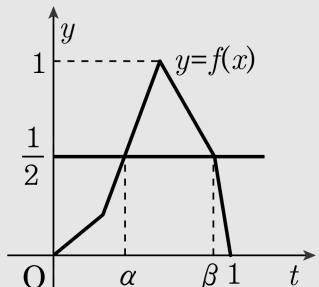
해설



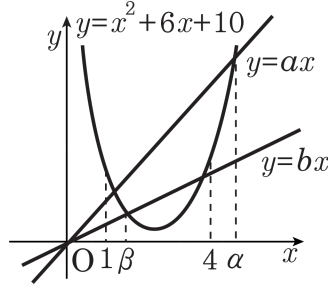
$f(x) = t$ 라 하면
 $f(f(x)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \alpha, \beta$
 $\left(0 < \alpha < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < \beta < 1\right)$



i) $t = \alpha$ 일 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 는 두 개
 ii) $t = \beta$ 일 때, $f(x) = \beta$ 를 만족하는 x 는
 두 개 방정식 $f(f(x)) = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개수는 4개이다.



34. 다음 그림과 같이 $y = x^2 - 6x + 10$ 의 그래프가 직선 $y = ax$ 와 만나는 두 교점이 x 좌표가 각각 1, α 이고 직선 $y = bx$ 와 만나는 두 교점의 x 좌표가 각각 β , 4 일 때, $\frac{a}{b} + \frac{\alpha}{\beta}$ 의 값을 구하시오.



▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

방정식 $x^2 - 6x + 10 = ax$

즉, $x^2 - (a + 6)x + 10 = 0$ 의 두 근이 1, α 이므로

$$1 + \alpha = a + 6$$

$$1 \cdot \alpha = 10$$

$$\therefore \alpha = 10, a = 5$$

방정식 $x^2 - 6x + 10 = bx$

즉, $x^2 - (b + 6)x + 10 = 0$ 의 두 근이 β , 4 이므로

$$\beta + 4 = b + 6$$

$$4 \cdot \beta = 10$$

$$\therefore \beta = \frac{5}{2}, b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{a}{b} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{\frac{1}{2}} + \frac{10}{\frac{5}{2}} = 10 + 4 = 14$$

35. 함수 f 가 다음 세 조건을 만족한다.

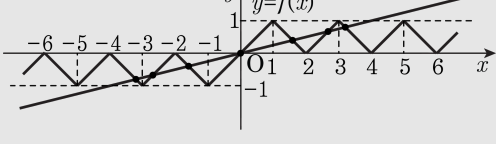
- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$
(나) $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = f(x+2)$
(다) $0 \leq x \leq 2$ 일 때, $f(x) = 1 - |x-1|$

이 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = ax$ 의 교점의 개수가 7 이기 위한 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-\frac{1}{4} < a < \frac{1}{4}$ ② $0 < a < 2$ ③ $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{4}$
④ $\frac{1}{5} < a < \frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3} < a < 3$

해설

(다) 의 $f(x) = 1 - |x-1|$ 에서
 $0 \leq x < 1$ 일 때, $f(x) = 1 + x - 1 = x$
 $1 \leq x \leq 2$ 일 때, $f(x) = 1 - x + 1 = -x + 2$
또, (나) 에서 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = f(x+2)$ 이고, (가) 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



(i) 직선 $y = ax$ 가 점 $(3, 1)$ 을 지날 때, $1 = 3a$ 에서 $a = \frac{1}{3}$
이 때, 이 직선과 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는 5 이다.
(ii) 직선 $y = ax$ 가 점 $(5, 1)$ 을 지날 때, $1 = 5a$ 에서 $a = \frac{1}{5}$
이 때, 이 직선과 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는 9 이다.
따라서, 직선 $y = ax$ 와 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수가 7 이기 위한 a 의 값의 범위는

$\frac{1}{5} < a < \frac{1}{3}$

36. $a < -1$ 일 때, x 에 대한 방정식 $|x^2 - 1| - 1 = a$ 의 실근의 개수를 구하면? (단, 중근은 하나로 센다.)

① 없다. ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

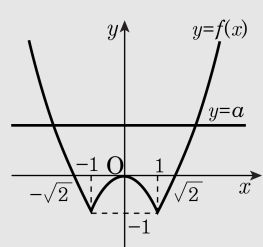
방정식 $|x^2 - 1| - 1 = a$ 의 실근의 개수는 $y = |x^2 - 1| - 1$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점의 개수를 조사하면 구할 수 있다.

$$y = |x^2 - 1| - 1 \text{에서 } |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & (x^2 - 1 \geq 0 \text{ 일 때}) \\ -x^2 + 1 & (x^2 - 1 < 0 \text{ 일 때}) \end{cases}$$

이므로 $f(x) = |x^2 - 1| - 1$ 로 놓으면

(i) $x^2 - 1 \geq 0$, 즉 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$ 일 때,

$$f(x) = x^2 - 1 - 1 = x^2 - 2$$



(ii) $x^2 - 1 < 0$, 즉 $-1 < x < 1$ 일 때,

$$f(x) = -x^2 + 1 - 1 = -x^2$$

(i), (ii)로부터 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서, 구하는 실근의 개수는 a 의 값에 따라 다음과 같다.

$$\begin{cases} a < -1 \text{ 일 때, 없다.} \\ a = -1 \text{ 또는 } a > 0 \text{ 일 때, 2개} \\ a = 0 \text{ 일 때, 3개} \\ -1 < a < 0 \text{ 일 때, 4개} \end{cases}$$