1. 실수 x, y에 대하여 $x+y+(xy-1)i=2+i$일 때 x^2+y^2의 값은?

① 4　② 2　③ 1　④ 0　⑤ -1

해설

$x+y=2,\ xy-1=1 \quad \therefore xy=2$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=0$

2. $\frac{1}{\sqrt{-8}}(3\sqrt{-2}-3\sqrt{-8}+\sqrt{-32})$ 을 계산하면?

① i ② $\frac{1}{2}$ ③ $-i$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{i}{2}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{1}{2\sqrt{2}i}\left(3\sqrt{2}i-6\sqrt{2}i+4\sqrt{2}i\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}i}\times\sqrt{2}i\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

3. $\sqrt{(-1)^2}+i^2-\frac{1}{i}$ 를 계산하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ $-i$ ⑤ i

해설

(준식)$=1-1+i=i$

4. $\alpha = 1+i, \beta = 1-i$ 일 때, $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$ 의 값은?

① i ② $-i$ ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1-i}{1+i}+\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1-i)^2+(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{(1-2i+i^2)+(1+2i+i^2)}{1-i^2}$$
$$=\frac{2+2i^2}{1-(-1)}=\frac{2-2}{2}=0$$

5. 복소수 $z = a + bi$일 때, z의 켤레 복소수 $\bar{z} = a - bi$로 나타낸다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, a, b는 실수)

① $\overline{2+i} = 2 - i$

② $\overline{-2-\sqrt{3}i} = -2 + \sqrt{3}i$

③ $\overline{i-1} = i + 1$

④ $\overline{0} = 0$

⑤ $\overline{-2} = -2$

해설

켤레복소수는 허수부분의 부호를 바꾼다.
③ $i - 1$의 허수부분은 i 이므로 $\overline{i-1} = -i - 1$이다.
실수의 켤레복소수는 자기 자신이므로 ④, ⑤는 옳다.

6. $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}$를 계산하면?

① $\sqrt{15}$ ② $-\sqrt{15}$ ③ $\sqrt{15}i$
④ $-\sqrt{15}i$ ⑤ -15

해설

$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{5}i=-\sqrt{15}$

7. 방정식 $|x+5|=1$를 만족하는 x의 값들의 합은?

① -9 ② -10 ③ -11 ④ -12 ⑤ -13

해설

$|x+5|=1$

$\Rightarrow\ x+5=1$ 또는 $x+5=-1$

$\therefore\ x=-4$ 또는 $x=-6$

8. 이차방정식 $x^2-mx+2m+1=0$의 한 근이 1일 때 다른 한 근은? (단, m은 상수)

① 3 ② 2 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

$x^2-mx+2m+1=0$에 $x=1$을 대입하면
$1-m+2m+1=0 \quad \therefore m=-2$
$x^2+2x-3=0, \quad (x+3)(x-1)=0$
$\therefore x=-3,\ 1$
따라서, 다른 근은 -3

9. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고르면?

㉠ $x^2+2x+1=0$	㉡ $x^2+2x+4=0$
㉢ $x^2+4x+2=0$	

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(x+1)^2=0$: 중근

㉡ $a=1, b'=1, c=4$

$1^2-1\cdot 4=-3<0$: 허근

㉢ $a=1, b'=2, c=2$

$2^2-1\cdot 2=2>0$: 서로 다른 두 실근 (○)

10. 이차방정식 $2x^2 - 4x + 5 = 0$의 두 근을 α와 β라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$의 값은?

① -7 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 7

해설

$2x^2 - 4x + 5 = 0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = \dfrac{5}{2}$

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 2^3 - 3 \times \frac{5}{2} \times 2 \\ &= 8 - 15 = -7\end{aligned}$$

11. $(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$ 가 순허수일 때, x 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -3 ④ 1, 3 ⑤ -1

해설

$(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$
$=x^2+x^2i+2x+4xi-3+3i$
$=(x^2+2x-3)+(x^2+4x+3)i$
순허수를 만족하려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$이어야 한다.
$x^2+2x-3=0$이면서, $x^2+4x+3\neq 0$인 x값을 찾아야 한다.
$\therefore x=1$

12. 실수 x, y에 대하여, 등식 $2x+y+(x-3y)i=3+2i$가 성립할 때, $\frac{x}{y}$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{11}$ ② 11 ③ 7 ④ -7 ⑤ -11

해설

$2x+y=3$, $x-3y=2$ 이므로

$x=\frac{11}{7}$, $y=-\frac{1}{7}$

$\therefore \frac{x}{y}=\frac{11}{7}\times-\frac{7}{1}=-11$

13. $\dfrac{a}{1-i}+\dfrac{b}{1+i}=5$를 만족하는 두 실수 $a,\ b$에 대하여 곱 ab의 값을 구하면?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

$\dfrac{a(1+i)}{2}+\dfrac{b(1-i)}{2}=5$

$a(1+i)+b(1-i)=10,$

$(a+b)+(a-b)i=10$

$a+b=10,\ a-b=0$

$2a=10,\ a=5,\ b=5,\ ab=25$

14. 등식 $\left(\frac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\frac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right)=a+bi$ 를 만족하는 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b=9$

해설

(좌변) $=\frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$

$=\frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2}$

$=\frac{6-7i}{3}=2-\frac{7}{3}i$ 이므로

$2-\frac{7}{3}i=a+bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=2,\ b=-\frac{7}{3}$

$\therefore\ a-3b=2-3\times\left(-\frac{7}{3}\right)=2+7=9$

15. $z = \dfrac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^2 - 2z + 3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ -1

해설

$z = \dfrac{2}{1+i} = 1 - i$

$z^2 - 2z + 3 = (1-i)^2 - 2(1-i) + 3 = 1$

16. 복소수 z의 켤레복소수 $\bar{z}$라 할 때 $(1+2i)z+3(2-\bar{z})=0$을 만족하는 복소수 z를 구하면?

① $z=2-3i$ ② $z=4-3i$ ③ $z=6-3i$
④ $z=2+3i$ ⑤ $z=4+3i$

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$라 하면
$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= (1+2i)(a+bi)+3(2-a+bi) \\
&= (6-2a-2b)+(2a+4b)i
\end{aligned}
$$
$\therefore 6-2a-2b=0, 2a+4b=0$
$\therefore a=6, b=-3$
$\therefore z=6-3i$

17. x에 대한 일차방정식 $(a^2+3)x+1=a(4x+1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(a^2+3-4a)x=a-1$
모든 x에 대해 성립하려면
$a^2-4a+3=0,\ a-1=0$
공통근 : $a=1$

18. $2|x-1|+x-4=0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -2

해설

ⅰ) $x<1$일 때,
$-2(x-1)+(x-4)=0$
$\therefore x=-2$
ⅱ) $x\geq 1$일 때,
$2(x-1)+x-4=0$
$\therefore x=2$
따라서 구하는 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이다.

19. 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+4=0$ 이 중근을 갖도록 하는 상수 k 값들의 합은?

① 1 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 2

해설

중근을 가지려면 판별식 $D=0$

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-4=0$

$k^2-2k-3=0,\ (k-3)(k+1)=0$

$\therefore\ k=3,-1$

20. x에 대한 이차방정식$(m-1)x^2-2mx+(m+2)=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값과 그 때의 중근을 α라 할 때, $m+\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $m \neq 1$ 이고, x의 계수가 $2m$ 이므로

$\frac{D}{4}=m^2-(m-1)(m+2)=0$

정리하면, $-m+2=0 \quad \therefore\ m=2$

$m=2$ 를 준식에 대입하면

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$

$\therefore\ x=2$ (중근 α)

$\therefore m+\alpha=2+2=4$

21. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 실근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k < 1$　　② $k \leq 1$　　③ $k < 3$

④ $k \leq 3$　　⑤ $1 < k < 3$

해설

$3x^2 + 6x + k = 0,$

$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 3 \cdot k \geq 0$

$3k \leq 9 \quad \therefore \ k \leq 3$

22. 이차방정식 $ax^2+4x-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 a 값의 범위는?

① $a>-2$
② $-2<a<0,\ a>0$
③ $-2<a<0$
④ $a>2$
⑤ $a<0,\ 0<a<2$

해설

$ax^2+4x-2=0$에서

(ⅰ) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $a\neq 0$이어야 한다.

(ⅱ) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=2^2-(-2a)>0,\ 2a+4>0$

$\therefore a>-2$

따라서 실수 a값의 범위는

$-2<a<0$ 또는 $a>0$

23. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이
허근을 가지려면
$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$
$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$
$-2k+2<0,\ k>1$
$\therefore\ m=1$

24. $2x^2+4x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}\times(-2)=1$

25. $x^2 - px + q = 0$의 두 근이 α, β이다. $\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = 2$일 때 $p^2 + q^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

두 근의 합이 3이므로 $p = 3$,
두 근의 곱이 2이므로 $q = 2$이다.
따라서 $p^2 + q^2 = 9 + 4 = 13$

26. 이차방정식 $2x^2-6x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $2x^2-6x+1=0$
② $x^2-6x+1=0$
③ $x^2-7x+3=0$
④ $2x^2+6x-1=0$
⑤ $2x^2-7x+3=0$

해설

근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=\frac{6}{2}=3$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$ 이므로

3 과 $\frac{1}{2}$을 이용한 근과 계수의 관계를 구해보면

$3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$, $3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0$

$\therefore\ 2x^2-7x+3=0$

27. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3 ② 0 ③ 2

④ 4 ⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$
근과 계수와의 관계에 의해
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입
$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$
계수가 유리수이므로
$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

28. 다음 방정식의 해는?

$$x^2-5|x|+6=0$$

① 0, ± 1 ② 0, ± 2 ③ ±1, ± 2

④ ±2, ± 3 ⑤ ±3, ± 4

해설

(ⅰ) $x^2-5|x|+6=0$에서

$x \geq 0$일 때,

$x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$, 또는 $x=3$

(ⅱ) $x<0$일 때,

$x^2+5x+6=0$

$(x+2)(x+3)=0$

$\therefore x=-2$, 또는 $x=-3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=\pm2,\ x=\pm3$

29. 방정식 $x^2-2|x|-3=0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $x \geq 0$이므로 $x=3$

ⅱ) $x<0$일 때

$x^2+2x-3=0$, $(x-1)(x+3)=0$

$x=1$ 또는 $x=-3$

그런데 $x<0$이므로 $x=-3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3$ 또는 $x=-3$

따라서 근의 합은 0이다.

30. 방정식 $(x-1)^2+|x-1|-6=0$의 두 근의 합은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

(ⅰ) $x \geq 1$일 때
$x^2-2x+1+x-1-6=0$
$x^2-x-6=0$, $(x-3)(x+2)=0$이므로
$x=-2$, $x=3$
그런데 $x \geq 1$이므로 $x=3$
(ⅱ) $x<1$일 때
$x^2-2x+1-x+1-6=0$
$x^2-3x-4=0$, $(x-4)(x+1)=0$
$x=-1$, $x=4$
그런데 $x<1$이므로 $x=-1$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3, -1$이므로
두 근의 합은 2

31. 이차방정식 $2[x]^2+3[x]+1=0$의 해를 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-1 \le x < 0$ ② $-1 \le x < 1$ ③ $-1 \le x < 2$
④ $0 \le x < 1$ ⑤ $0 \le x < 2$

해설

$2[x]^2+3[x]+1=([x]+1)(2[x]+1)=0$이므로

$[x]=-1$ 또는 $[x]=-\frac{1}{2}$

그런데 $[x]$은 정수이므로 $[x]=-1$

$\therefore -1 \le x < 0$

32. 방정식 $2[x]^2 - [x] - 1 = 0$의 해를 $a \le x < b$라 할 때, $2a + b$의 값을 구하면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2[x]^2 - [x] - 1 = (2[x] + 1)([x] - 1) = 0$
그런데 $[x]$는 정수이므로 $[x] = 1$
$\therefore 1 \le x < 2$
$\therefore a = 1, b = 2$이므로 $2a + b = 4$

33. 0이 아닌 두 실수 $a,\ b$가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$를 만족할 때, 다음 [보기]의 x에 대한 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$

㉡ $x^2 - ax - b = 0$

㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이므로 $a < 0,\ b < 0$

㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$에서

$D = b^2 - 4a > 0$

㉡ $x^2 - ax - b = 0$에서

$D = a^2 + 4b$는 음수, 양수를 판별할 수 없다.

㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$에서

$\frac{D}{4} = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab > 0$

34. a가 실수일 때, $f(x) = x^2 + 2(a+1)x + a^2$, $g(x) = x^2 + 2ax + (a-1)^2$ 에 대하여 x에 대한 두 이차방정식 $f(x) = 0, g(x) = 0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① $f(x) = 0$이 실근을 가지면 $g(x) = 0$도 실근을 가진다.

② $f(x) = 0$이 실근을 가지면 $g(x) = 0$은 허근을 가진다.

③ $f(x) = 0$이 허근을 가지면 $g(x) = 0$도 허근을 가진다.

④ $g(x) = 0$이 실근을 가지면 $f(x) = 0$은 허근을 가진다.

⑤ $g(x) = 0$이 허근을 가지면 $f(x) = 0$은 실근을 가진다.

해설

방정식 $f(x) = 0$과 $g(x) = 0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$\frac{D_1}{4} = (a+1)^2 - a^2 = 2a + 1$,

$\frac{D_2}{4} = a^2 - (a-1)^2 = 2a - 1$

모든 실수 a에 대하여

$2a + 1 > 2a - 1$,

즉, $D_1 > D_2$이므로 $D_1 < 0$이면 $D_2 < 0$

35. x에 대한 이차식 $x^2-2(k+a)x+(k+1)^2+a^2-b-3$이 k에 관계없이완전제곱식이 되는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

완전제곱식이면 판별식이 0이다.

$\Rightarrow \quad D' = (k+a)^2-(k+1)^2-a^2+b+3=0$

$\Rightarrow \quad 2(a-1)k+b+2=0$

$\Rightarrow \quad a=1, \quad b=-2,$

$\therefore \quad a+b=-1$

36. x의 이차방정식 $x^2-(2a+2+m)x+a^2+4a-n=0$이 a의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 상수 m, n을 정할 때, $m+n$의 값은?

① -3　② -2　③ 1　④ 3　⑤ 4

해설

$D=(2a+2+m)^2-4(a^2+4a-n)=0$
이 등식을 a에 관하여 정리하면
$4a(m-2)+m^2+4m+4n+4=0$
이 등식이 a에 관계없이 항상 성립하려면
$4(m-2)=0,\ m^2+4m+4n+4=0$
$\therefore\ m=2,\ n=-4$　　$\therefore\ m+n=-2$

37. x에 관한 이차방정식 $x^2+2(m+a-2)x+m^2+a^2-3b=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+3b$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

중근을 가지려면 판별식이 0이다.

$D' = (m+a-2)^2 - (m^2+a^2-3b) = 0$

$\Rightarrow \quad 2m(a-2)+4-4a+3b=0$

m에 관계없이 성립하려면,

$a=2 \quad \Rightarrow \quad b=\frac{4}{3}$

$a+3b=6$

38. 이차방정식 $x^2-5x-m=0$의 한 근이 다른 근의 4배일 때, 상수 m의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

주어진 식의 한 근이 다른 한 근의 4배이므로
두 근을 $\alpha,\ 4\alpha(\alpha \neq 0)$ 로 놓으면
$\alpha + 4\alpha = 5 \cdots\cdots$ ㉠
$\alpha \cdot 4\alpha = -m \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\alpha = 1,\ m = -4$

해설

39. 복소수의 범위에서 인수분해가 옳게 된 것은?

① $x^4+x^2-2=(x+1)(x-1)(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

② $x^3-1=(x-1)(x^2-x+1)$

③ $x^2-2x-1=(x-1-\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$

④ $x^2+2x+3=(x+1-2i)(x+1+2i)$

⑤ $x^4-4=(x+2)(x-2)(x+2i)(x-2i)$

해설

① $(x^2+2)(x^2-1)=(x+1)(x-1)(x^2+2)$
$=(x+1)(x-1)(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$ → (◯)

② $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

③ $x^2-2x-1=(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

④ $x^2+2x+3=(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

⑤ x^4-4
$=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$

40. 유리수 a, b에 대하여 곡선 $y = x^2 - a$와 직선 $y = bx$가 만나는 두 교점을 P, Q라 한다. 점 P의 x좌표가 $2 + \sqrt{3}$일 때, $a + b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\begin{cases} y = x^2 - a \\ y = bx \end{cases}$$

$bx = x^2 - a$ $\therefore$ P, Q의 x좌표는 $x^2 - bx - a = 0$의 두 근이다.
점 P의 x좌표가 $2 + \sqrt{3}$이므로,
켤레근인 $2 - \sqrt{3}$은 점 Q의 x좌표이다.
근과 계수와의 관계에 의해서
$b = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$
$-a = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$ $\therefore$ $a = -1$
$\therefore$ $a + b = (-1) + 4 = 3$

41. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x 의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0　② $\sqrt{3}$　③ $-\sqrt{3}$　④ 1　⑤ -1

해설

$i(x+i)^3 = i(x^3+3x^2i-3x-i)$

$= (-3x^2+1)+(x^3-3x)i$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$\therefore\ x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$

42. α, β가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.)

㉠ $\alpha=\overline{\beta}$이면 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다.
㉡ $\alpha=\overline{\beta}$일 때, $\alpha\beta=0$이면 $\alpha=0$이다.
㉢ $\alpha^2+\beta^2=0$이면 $\alpha=0$, $\beta=0$이다.
㉣ $\alpha+\beta i=0$이면 $\alpha=0$, $\beta=0$이다.

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 없다

해설

㉠ $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면
$\alpha=\overline{\beta}$이므로 $\beta=a-bi$
$\therefore\ \alpha+\beta=(a+bi)+(a-bi)=2a$
$\alpha\beta=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$
$\therefore\ \alpha+\beta$, $\alpha\beta$는 실수이다.
㉡ :㉠에서 $\alpha\beta=a^2+b^2=0$, a, b는
실수이므로 $a=0$, $b=0$ 즉, $=a+bi=0$이다.
㉢ :(반례) $\alpha=i$, $\beta=1$
$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=i^2+1^2=0$
㉣ :(반례) $\alpha=1$, $\beta=i$
$\therefore\ \alpha+\beta i=0$
∴ ㉢, ㉣는 α, β가 실수일 때만 성립한다.

43. $a,\ b$는 양수라 할 때, 다음 중 $z=a(1+i)+b(1-i), i=\sqrt{-1}$의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $1-3i$　　② $2+3i$　　③ $4-2i$

④ $-3+2i$　　⑤ $2-5i$

해설

$z=(a+b)+(a-b)i$ (a, b 는 양수)

① $1-3i$ 에서 $a+b=1,\ a-b=-3$

$a=-1,\ b=2 \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

② $2+3i$ 에서 $a+b=2,\ a-b=3$

$a=\frac{5}{2},\ b=-\frac{1}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

③ $4-2i$ 에서 $a+b=4,\ a-b=-2$

$a=1,\ b=3 \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건을 만족시킴

④ $-3+2i$ 에서 $a+b=-3,\ a-b=2$

$a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{5}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

⑤ $2-5i$ 에서 $a+b=2,\ a-b=-5$

$a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{7}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

44. $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}+\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{8}$ 값을 구하면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 1
④ 0 ⑤ -1

해설

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\omega+1=\sqrt{3}i$
양변을 제곱해서 정리하면 $\omega^2+\omega+1=0$
$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \Rightarrow \omega^3=1$
$(\omega^3)^3\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

45. 두 양의 실수 x, y 가 $2x^2+xy-2y^2=0$을 만족할 때, $\frac{x}{y}$ 를 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$　② $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$　③ $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$
④ $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$　⑤ $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

해설

$x>0,\ y>0$ 에서 $2x^2+xy-2y^2=0$의 양변을 y^2으로 나누면
$2\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{x}{y}\right)-2=0$
$\frac{x}{y}=t$라 하면 $(t>0)$
$2t^2+t-2=0$
근의 공식에 대입하면
$t=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$
$\therefore t=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\ (t>0)\ \frac{x}{y}=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

46. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2+2cx+a-b$는 x의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형
④ a가 빗변인 직각삼각형
⑤ c가 빗변인 직각삼각형

해설

$a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a>0,\ b>0,\ c>0$
따라서, $a+b>0$이므로 준식은 이차식이다.
준식이 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$
$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)=0$
정리하면, $c^2-a^2+b^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a가 빗변인 직각삼각형

47. $x,\ y$ 에 대한 이차식 $f(x,\ y) = x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3$ 이 $x,\ y$ 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3 = 0$ 의 두 근을 구하면
근의 공식에 의하여

$x = -(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - (y^2 + ky - 3)}$

$\quad = -(y-1) \pm \sqrt{-(2+k)y + 4} \ \cdots\cdots$ ㉠

한편, $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이면
$x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$ 이고
준식이 $x,\ y$ 의 일차식으로 인수분해되므로
x 의 두 근 ㉠에서 $-(2+k)y + 4$가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.
따라서 근호 안의 판별식 D 는 0이어야 한다.

$\therefore\ D = (2+k)^2 - 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0$

$2 + k = 0$

$\therefore\ k = -2$

48. 이차방정식 $f(2x+1)=2$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=4$가 성립한다. 이 때, $3f(x)-2=4$의 두 근의 합은?

① 7　　② 8　　③ 9　　④ 10　　⑤ 11

해설

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$f(2x+1)=a(2x+1)^2+b(2x+1)+c=2$

$\therefore a(4x^2+4x+1)+b(2x+1)+c-2=0$

$4ax^2+4ax+a+2bx+b+c-2=0$

$4ax^2+(4a+2b)x+a+b+c-2=0$

따라서 두 근의 합 $\alpha+\beta=\dfrac{-(4a+2b)}{4a}=4$

$\therefore 4a+2b=-16a,\ \ 2b=-20a$이므로

$b=-10a$

$3f(x)-2=4$이므로 $3f(x)=6$

$\therefore f(x)=2 \quad \therefore ax^2+bx+c-2=0$에서

두 근의 합 $\alpha'+\beta'=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-10a}{a}=10$

49. 이차항의 계수가 1 인 이차방정식에서 상수항을 1 만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3 만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$ 이라 하면
$x^2 + bx + (c + 1) = 0$ 의 근은 중근이 된다.
$\therefore\ D = b^2 - 4(c + 1) = 0$
$\therefore\ b^2 = 4c + 4 \cdots\cdots$ ㉠
또, $x^2 + bx + (c - 3) = 0$ 의 두 근은 $\alpha,\ 2\alpha$ 가 된다.
$\therefore\ \alpha + 2\alpha = -b \cdots\cdots$ ㉡
$\therefore\ \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $b = \pm 12,\ c = 35$ 이므로
처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$
$\therefore\ x = -5$ 또는 -7, $\quad x = 5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합)$= (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$

50. x의 이차방정식 $x^2 + (2m-1)x + m^2 - m - 2 = 0$의 두 근이 모두 양이고, 또 한 근이 다른 근의 2배일 때, 실수 m의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$D = (2m-1)^2 - 4(m^2 - m - 2) = 9 > 0$이므로
서로 다른 두 실근을 갖는다.
두 근을 α, 2α라 하면
$\alpha + 2\alpha = -(2m-1) > 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$\alpha \times 2\alpha = m^2 - m - 2 > 0 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$m < -1 \quad \cdots\cdots$ ㉢
또, ㉠에서의 $\alpha = \dfrac{1-2m}{3}$을 ㉡에 대입하여 풀면 $m = -4,\ 5$
조건 ㉢에 의해서 $m = -4$