1. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.
그 점의 좌표가 (a,b) 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a<0, b<0$)

$$(x^2+y^2+2x+3y-1)m+(x^2+y^2+2x+2y-3)=0$$

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.
$x^2+y^2+2x+3y-1=0$,
$x^2+y^2+2x+2y-3=0$
연립하여 풀면 $(x,y)=(-3,-2),(1,-2)$
그러므로 $(a,b)=(-3,-2)$

2. 원 $x^2+y^2=8$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-2<k<2$ ② $0<k<4$ ③ $-4<k<0$
④ $-2<k<0$ ⑤ $-4<k<4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d를 구하면

$d=\dfrac{|0+0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<r$이고

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}$ $\quad\therefore\ -4<k<4$

3. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가 1 인 접선의 방정식은 $y = x \pm$ (　　　)이다. (　　　)안의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$　② $2\sqrt{2}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $4\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

직선과 원이 접하면 원의 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$y = x + k$ 라 하면

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2,\quad k = \pm 2\sqrt{2}$$

$\therefore\quad y = x \pm 2\sqrt{2}$

4. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2+y^2-2x+4y+1=0, \quad 3x-4y+6=0$

▶ 답 : ＿＿＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$
따라서, 원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선
$3x-4y+6=0$ 까지의 거리 d 는
$d=\dfrac{|17|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{17}{5}$
이때, $\dfrac{17}{5}>2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.
$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

5. 중심이 $C(1,\ 2)$ 이고, 직선 L : $x+2y=0$ 에 접하는 원의 반지름을 r 이라 할 때 r^2 은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

반지름은 $\frac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$\therefore$ 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=5$ 이므로

$\therefore\ r^2=5$

6. 직선 $(a+2)x+(a-1)y-3=0$ 이 원 $2x^2+2y^2-4x+8y+3=0$ 의 넓이를 이등분할 때, a 의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

$2x^2+2y^2-4x+8y+3=0$

$2(x-1)^2+2(y+2)^2=7$

$(x-1)^2+(y+2)^2=\frac{7}{2}$

따라서 원의 중심 $(1,-2)$ 가 직선 위에 있으므로 $(a+2)\times 1+(a-1)\times(-2)-3=0$

$\therefore\ a=1$

7. 두 원 $x^2+y^2-36=0$, $x^2+y^2-3x+4y-11=0$의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $3\sqrt{11}$ ④ $4\sqrt{11}$ ⑤ $5\sqrt{11}$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

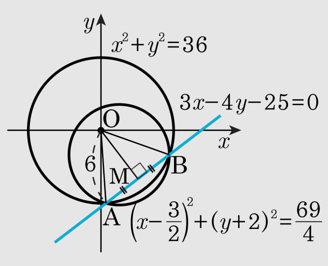
$x^2+y^2-36-(x^2+y^2-3x+4y-11)=0$

$\therefore 3x-4y-25=0 \cdots\cdots ㉠$

$x^2+y^2-3x+4y-11=0$에서

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{69}{4}$

이므로 두 원을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B

$\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면

원 $x^2+y^2=36$의 중심 $(0,0)$과 직선 ㉠사이의 거리 $\overline{OM}$은

$\overline{OM}=\frac{|-25|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$

원 $x^2+y^2=36$의 반지름의 길이는 6이므로

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AM}=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{AB}$는

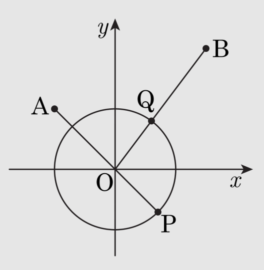
$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{11}$

8. 두 점 A$(-2,\ 2)$, B$(3,\ 4)$ 가 있다. 원 $x^2+y^2=4$ 위의 임의의 두 점을 P, Q 라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}$ 의 최댓값과 $\overline{\mathrm{BQ}}$ 의 최솟값의 합은 ?

① 3　　② $2+2\sqrt{2}$　　③ $5+2\sqrt{2}$

④ $4+2\sqrt{2}$　　⑤ 7

해설



그림과 같이 P 와 Q 가 있을 때 $\overline{\mathrm{AP}}$ 는 최대가되고 $\overline{\mathrm{BQ}}$ 는 최소가 된다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}=$ 반지름의 길이+ 원의 중심과 A 까지의 거리

$= 2+\sqrt{(-2-0)^2+(2-0)^2} = 2+2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{BQ}}=$ 원의 중심과 B 까지의 거리− 반지름의 길이

$= \sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}-2$

$=5-2=3$

$\therefore$ 구하는 답은 $(2+2\sqrt{2})+3=5+2\sqrt{2}$