

1. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.

그 점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a < 0, b < 0$)

$$(x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1)m + (x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3) = 0$$

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.

$$x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$$

연립하여 풀면 $(x, y) = (-3, -2), (1, -2)$

그러므로 $(a, b) = (-3, -2)$

2. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 과 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-2 < k < 2$

② $0 < k < 4$

③ $-4 < k < 0$

④ $-2 < k < 0$

⑤ $-4 < k < 4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 를 구하면

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$ 이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \quad \therefore -4 < k < 4$$

3. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은 $y = x \pm$ ()이다. ()안의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $3\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{2}$

⑤ $5\sqrt{2}$

해설

직선과 원이 접하면 원의 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$y = x + k$ 라 하면

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2, \quad k = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore y = x \pm 2\sqrt{2}$$

4. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0, \quad 3x - 4y + 6 = 0$$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$$

따라서, 원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선

$3x - 4y + 6 = 0$ 까지의 거리 d 는

$$d = \frac{|17|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{17}{5}$$

이때, $\frac{17}{5} > 2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

∴ 교점의 개수 : 0 개

5. 중심이 $C(1, 2)$ 이고, 직선 $L : x + 2y = 0$ 에 접하는 원의 반지름을 r 이라 할 때 r^2 은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

$$\text{반지름은 } \frac{|1 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$\therefore$ 구하는 원의 방정식은

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 \text{ 이므로}$$

$$\therefore r^2 = 5$$

6. 직선 $(a+2)x + (a-1)y - 3 = 0$ 이 원 $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + 3 = 0$ 의 넓이를 이등분할 때, a 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + 3 = 0$$

$$2(x-1)^2 + 2(y+2)^2 = 7$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{7}{2}$$

따라서 원의 중심 $(1, -2)$ 가 직선 위에 있으므로 $(a+2) \times 1 + (a-1) \times (-2) - 3 = 0$

$$\therefore a = 1$$

7. 두 원 $x^2 + y^2 - 36 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11 = 0$ 의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{11}$

② $2\sqrt{11}$

③ $3\sqrt{11}$

④ $4\sqrt{11}$

⑤ $5\sqrt{11}$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 36 -$$

$$(x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11) = 0$$

$$\therefore 3x - 4y - 25 = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11 = 0$ 에서

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{69}{4}$$

이므로 두 원을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B

$\overline{AB}$ 의 중점을 M이라 하면

원 $x^2 + y^2 = 36$ 의 중심 (0,0)과 직선 $\textcircled{7}$ 사이의 거리 $\overline{OM}$ 은

$$\overline{OM} = \frac{|-25|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$$

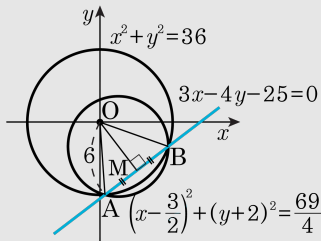
원 $x^2 + y^2 = 36$ 의 반지름의 길이는 6이므로

피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{AM} = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{AB}$ 는

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{11}$$



8. 두 점 $A(-2, 2)$, $B(3, 4)$ 가 있다. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 임의의 두 점을 P , Q 라 할 때, $\overline{AP}$ 의 최댓값과 $\overline{BQ}$ 의 최솟값의 합은 ?

① 3

② $2 + 2\sqrt{2}$

③ $5 + 2\sqrt{2}$

④ $4 + 2\sqrt{2}$

⑤ 7

해설

그림과 같이 P 와 Q 가 있을 때 $\overline{AP}$ 는 최대가되고 $\overline{BQ}$ 는 최소가 된다.

$\therefore \overline{AP} = \text{반지름의 길이} + \text{원의 중심과 } A \text{ 까지의 거리}$

$$= 2 + \sqrt{(-2-0)^2 + (2-0)^2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

$\overline{BQ} = \text{원의 중심과 } B \text{ 까지의 거리} - \text{반지름의 길이}$

$$= \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} - 2$$

$$= 5 - 2 = 3$$

$$\therefore \text{구하는 답은 } (2 + 2\sqrt{2}) + 3 = 5 + 2\sqrt{2}$$

