1. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ 내림차순으로 정리하면 $3yx^3+(9y-z)x+5y-4$이다. ㉡ 오름차순으로 정리하면 $5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다. ㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다. ㉣ x^3 의 계수는 3이다. ㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢
② ㉠, ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉡
④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

2. 두 다항식 $A,\ B$에 대하여 연산 $A \ominus B$와 $A \otimes B$을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$A \ominus B = A - 3B,\ A \otimes B = (A+B)B$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3,\ Q = x^3 + x^2y + xy^2$이라 할 때, $(P \ominus Q) \otimes Q$를 x, y에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$　　② $x^4y^2 - xy^5$　　③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$　　⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P-3Q) \otimes Q \\ &= (P-3Q+Q)Q \\ &= (P-2Q)Q \quad \cdots ①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P-2Q \\ &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

3. $(6x^3 - x^2 - 5x + 5) \div (2x - 1)$ 의 몫을 a, 나머지를 b라 할 때, $a + b$를 구하면?

① $3x^2 + x + 1$　② $x^2 + x + 1$　③ $3x^2 + 1$
④ $x^2 + x - 1$　⑤ $3x^2 + x$

해설

나눗셈을 이용하면 $a = 3x^2 + x - 2,\ b = 3$
$\therefore\ a + b = 3x^2 + x + 1$

해설

조립제법을 이용할 수 있다.

이 때, $2x - 1$로 나눈 몫은 $x - \frac{1}{2}$로 나눈 몫의 $\frac{1}{2}$이고 나머지는 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right) Q(x) + R \\ &= (2x - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot Q(x) + R \end{aligned}$$

4. x 에 대한 다항식 $A = 2x^3 + 5x^2 + 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x + 1$ 이고, 나머지가 $-6x + 2$ 이다. 이 때, 다항식 B 를 구하면?

① $x^2 + 2x + 2$ ② $x^2 + x + 2$ ③ $x^2 - x + 2$

④ $x^2 - 2x + 2$ ⑤ $x^2 - 3x + 2$

해설

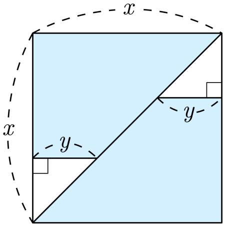
$A = B(2x + 1) - 6x + 2$ 에서

$B(2x + 1) = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2$

$\therefore B = (2x^3 + 5x^2 + 6x + 2) \div (2x + 1)$

$= x^2 + 2x + 2$

5. 다음 그림은 한변의 길이가 x인 정사각형을 대각선을 따라 자른 후 직각이등변삼각형 2 개를 떼어낸 도형이다. 이때, 색칠한 부분의 넓이를 x, y에 관한 식으로 나타내어라.



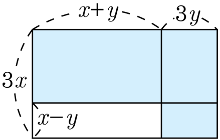
① $xy - y^2$　② $x^2 - y^2$　③ $x^2 - y$

④ $\dfrac{xy - y^2}{2}$　⑤ $\dfrac{x - y}{2}$

해설

$$x^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times y \times y = x^2 - y^2$$

6. 다음 그림의 직사각형에서 색칠한 부분의 넓이를 나타내는 식을 세워 전개하였을 때, y^2 항의 계수는?



① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(x+4y)(3x)-(x+y)(x-y)$

$=3x^2+12xy-x^2+y^2$

$=2x^2+12xy+y^2$

7. $(x+y)^n$ 을 전개할 때 항의 개수는 $n+1$ 개이다. 다항식 $\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$ 을 전개할 때, 항의 개수를 구하면 ?

① 7 개 ② 8 개 ③ 12 개 ④ 13 개 ⑤ 64 개

해설

$\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$
$= \{(4a^2-9b^2)^3\}^4$
$= (4a^2-9b^2)^{12}$
$\therefore$ $(4a^2-9b^2)^{12}$ 의 항의 개수는 13 개이다.

8. $(2x^3-3x^2+3x+4)(3x^4+2x^3-2x^2-7x+8)$을 전개한 식에서 x^3의 계수는?

① 31　② 33　③ 35　④ 37　⑤ 39

해설

$2x^3\times 8-3x^2\times(-7x)+3x\times(-2x^2)+4\times 2x^3=39x^3$

9. 두 다항식 A, B 에 대하여 $A+B=-x^3-2x^2+4x+5$, $2A-B=4x^3-x^2-x+1$ 일 때, 두 다항식 A,B 를 구하면?

① $A=x^3+x^2+x+2$, $B=-2x^3-3x^2+3x+3$

② $A=x^3-x^2+x+2$, $B=-2x^3-x^2+3x+3$

③ $A=x^3-x^2+x-2$, $B=-2x^3-x^2+3x+7$

④ $A=x^3-x^2-x+2$, $B=-2x^3-x^2+5x+3$

⑤ $A=3x^3-3x^2+3x+6$, $B=-4x^3+x^2+x-1$

해설

$A+B=-x^3-2x^2+4x+5\cdots$ ㉠

$2A-B=4x^3-x^2-x+1\cdots$ ㉡

(㉠ + ㉡) $\div 3$: $A=x^3-x^2+x+2$

(2㉠ − ㉡) $\div 3$: $B=-2x^3-x^2+3x+3$

10. 세 다항식 $A = x^2 + 3x - 2,\ B = 3x^2 - 2x + 1,\ C = 4x^2 + 2x - 3$ 에 대하여
$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$를 간단히 하면?

① $3x^2 + 12x - 13$
② $-3x^2 + 24x + 21$
③ $3x^2 - 12x + 21$
④ $-3x^2 - 24x + 21$
⑤ $x^2 + 12x + 11$

해설

$$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$$
$$= -2A + 5B - 4C$$
$$= -2(x^2 + 3x - 2) + 5(3x^2 - 2x + 1) - 4(4x^2 + 2x - 3)$$
$$= -3x^2 - 24x + 21$$

11. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 \\ &= (x^2+3x)+(2x+6) \\ &= x^2+(3x+2x)+6 \\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

① 교환법칙, 결합법칙

② 교환법칙, 분배법칙

③ 분배법칙, 결합법칙

④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙

⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 && (\text{분배}) \\ &= (x^2+3x)+(2x+6) && (\text{분배}) \\ &= x^2+(3x+2x)+6 && (\text{결합}) \\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

12. 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 나머지를 $r(x)$라 할 때, $f(x)-g(x)-2r(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$　② $-r(x)$　③ 0

④ $r(x)$　⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=g(x)Q(x)+r(x)$

$\therefore f(x)-g(x)-2r(x)$

$\quad =g(x)Q(x)+r(x)-g(x)-2r(x)$

$\quad =g(x)\{Q(x)-1\}-r(x)$

여기서 $g(x)$의 차수는 $-r(x)$의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$이다.

13. 다항식 $f(x)$ 를 $x+\frac{1}{3}$ 으로 나누었을 때, 몫과 나머지를 $Q(x)$, R 라고 한다. 이 때, $f(x)$ 를 $3x+1$ 으로 나눈 몫과 나머지를 구하면?

① $Q(x)$, R ② $3Q(x)$, $3R$ ③ $3Q(x)$, R

④ $\frac{1}{3}Q(x)$, R ⑤ $\frac{1}{3}Q(x)$, $\frac{1}{3}R$

해설

$$f(x)=Q(x)\left(x+\frac{1}{3}\right)+R=\frac{1}{3}Q(x)(3x+1)+R$$

14. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x-y-z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+2x+2y+1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$= x^6 - y^6$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$
$= x^3 + y^3 - 3xy - 1$

15. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$ 의 전개식으로 옳은 것은?

① a^3+b^3　② a^6+b^6　③ a^6-b^6

④ a^9+b^9　⑤ a^9-b^9

해설

(준 식)$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6$

16. $(-2x^3+x^2+ax+b)^2$의 전개식에서 x^3의 계수가 -8일 때, $a-2b$의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설

전개할 때 삼차항은 일차항과 이차항의 곱, 삼차항과 상수항의 곱이 각각 2개씩 나온다.

$(-2x^3\times b)\times 2+(x^2\times ax)\times 2=(-4b+2a)x^3$

$2a-4b=-8$

$\therefore\ a-2b=-4$

17. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

해설

준 식은 $(a-b)^3$ 이다.

$a - b = 2004 - 2001 = 3$

$\therefore\ (a-b)^3 = 3^3 = 27$

18. 세 실수 a, b, c가 다음 세 조건을 만족한다.

$$a+b+c=1,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1$$

이 때, $(a+b)(b+c)(c+a)$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$a+b+c=1$에서

$a+b=1-c,\ b+c=1-a,\ c+a=1-b$

$(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(1-c)(1-a)(1-b)$

$=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$

$=1-1+1-1=0$

19. $2^{16}-1$은 1과 10사이의 어떤 두 수로 나누어떨어진다. 이 때, 이 두 수의 합은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 임을 이용하여 $2^{16}-1$을 인수분해하면
$2^{16}-1=(2^8)^2-1^2$
$=(2^8+1)(2^8-1)$
$=(2^8+1)(2^4+1)(2^4-1)$
$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2^2-1)$
$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2+1)(2-1)$
$=257\cdot17\cdot5\cdot3$
따라서 $2^{16}-1$을 나누었을 때 나누어 떨어지는 1과 10사이의 수
즉, 인수는 3과 5이고 이 두 수의 합은 8이다.

20. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}$$

① 0 ② -1 ③ 1 ④ -10 ⑤ 10

해설

우변을 통분하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면,

$$(\text{우변}) = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})x^9 + \cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$$

양변의 계수를 비교하면

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0$

21. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x)+(1+x+x^2+x^3)^3$$

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

i) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수

: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,

계수$=2$

: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x를 곱할 때,

계수$=1$

ii) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수

$x+x^2+x^3=Y$라 하면,

$(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$

$3Y=3x+3x^2+3x^3$

일차항의 계수$=3$, 다른 항에는 일차항이 없다.

i), ii) 에서 $2+1+3=6$

22. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형　② 이등변삼각형
③ 정삼각형　④ 직각이등변삼각형
⑤ 둔각삼각형

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 에서 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$

$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)=0$

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$ 이고,

$a,\ b,\ c$ 는 실수이므로, $a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

23. $x^2 - x - 1 = 0$일 때, $x^3 - \frac{1}{x^3}$의 값과 $y + \frac{1}{y} = 1$일 때, $\frac{y^{10}+1}{y^2}$의 값은?

① 4, -1 ② 4, 18 ③ 8, -1 ④ 9, -1 ⑤ 4, 27

해설

(1) $x^2 - x - 1 = 0$의 양변을 x로 나누면

$$x - 1 - \frac{1}{x} = 0$$

$$\therefore\ x - \frac{1}{x} = 1$$

$$\therefore\ x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

(2) $y + \frac{1}{y} = 1$일 때

$y + \frac{1}{y} = 1$에서 $\frac{y^2+1}{y} = 1$

$\therefore\ y^2 - y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

양변에 $(y+1)$을 곱하면 $(y+1)(y^2 - y + 1) = 0$

$y^3 + 1 = 0\ \therefore\ y^3 = -1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\frac{y^{10}+1}{y^2} = \frac{(y^3)^3 \cdot y + 1}{y^2} = \frac{-y+1}{y^2}$$

$$= \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

24. 세 실수 a, b, c가 $a+b+c=3,\ a^2+b^2+c^2=9,\ a^3+b^3+c^3=24$를 만족시킬 때, $a^4+b^4+c^4+1$의 값을 구하면?

① 69 ② 70 ③ 71 ④ 72 ⑤ 73

해설

$a+b+c=3 \cdots$ ①
$a^2+b^2+c^2=9 \cdots$ ②
$a^3+b^3+c^3=24 \cdots$ ③ 이라 하면,
②식에서
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=9$
$9-2(ab+bc+ca)=9$
$\therefore\ ab+bc+ca=0 \quad \cdots$ ④
③식에서
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$24=3\cdot(9-0)+3abc$
$\therefore\ abc=-1 \quad \cdots$ ⑤
$a^4+b^4+c^4+1$
$=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+1$
$=81-2\cdot 6+1=70$
$(\because\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$
$=0-2\times(-1)\times 3$
$=6)$

25. $a-b=1$이고, $a^2+b^2=-1$일 때, $a^{14}+b^{20}$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$b=a-1$을 $a^2+b^2=-1$에 대입하면

$a^2-a+1=0$에서 $a^3=-1$

$a=b+1$을 $a^2+b^2=-1$에 대입하면

$b^2+b+1=0$에서 $b^3=1$

$$\begin{aligned} a^{14}+b^{20} &= (a^3)^4\times a^2+(b^3)^6\times b^2 \\ &= a^2+b^2=-1 \end{aligned}$$