1. 다음 곱셈공식을 전개한 것 중 바른 것은?

① $(x-y-1)^2=x^2+y^2+1-2xy-2x-2y$

② $(a+b)^2(a-b)^2=a^4-2a^2b^2+b^4$

③ $(-x+3)^3=x^3-9x^2+27x-27$

④ $(a-b)(a^2+ab-b^2)=a^3-b^3$

⑤ $(p-1)(p^2+1)(p^4+1)=p^{16}-1$

해설

① $(x-y-1)^2=x^2+y^2+1-2xy-2x+2y$
③ $(-x+3)^3=-x^3+9x^2-27x+27$
④ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
⑤ $(p-1)(p+1)(p^2+1)(p^4+1)=p^8-1$

2. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1$, $x = 2$ 를 대입하면 성립하므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & -3 & 3 & 1 & -6 \\
 & & -1 & 4 & 7 & 6 \\
\hline
2 & 1 & -4 & 7 & -6 & \boxed{0} \\
 & & 2 & -4 & 6 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3) = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$

따라서 실수근은 -1, 2 이므로 $-1 + 2 = 1$ 이다.

3. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

4. $ax+b>0$의 해가 $x<2$일 때, $(a+b)x<5b$의 해는?

① $x>5$ ② $x>10$ ③ $x<1$

④ $x<5$ ⑤ $x<10$

해설

$ax+b>0$에서 $ax>-b$

해가 $x<2$ 이므로

$a<0$ ······㉠

$-\frac{b}{a}=2$ ······㉡

㉡을 정리하면 $b=-2a$ ······㉢

㉢에서 $b=-2a$를 $(a+b)x<5b$에 대입하면

$(a-2a)x<5\cdot(-2a)$, $-ax<-10a$

㉠에서 $a<0$이므로 $x<10$

5. $ax^2 - 2ax + 3 < 0$를 만족하는 x가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a > 0$　　② $-1 < a < 3$　　③ $0 \le a \le 3$

④ $-1 < a < 4$　　⑤ $-1 \le a \le 4$

해설

(i) $a = 0$일 때, 성립한다.

(ii) $a \neq 0$일 때, 함수 $y = ax^2 - 2ax + 3$에서 $D \le 0$이므로

$a^2 - 3a \le 0$

$\therefore 0 < a \le 3 (\because a \neq 0)$

6. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x^2 - 4x < 5 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-1 < x < 2$

해설

부등식 $x^2 - 4 < 0$에서 $(x+2)(x-2) < 0$

$\therefore -2 < x < 2 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2 - 4x < 5$에서 $x^2 - 4x - 5 < 0$

$(x+1)(x-5) < 0$

$\therefore -1 < x < 5 \cdots\cdots$ ㉡

따라서 구하는 해는 ㉠과 ㉡를

동시에 만족하는 x의 값이므로

$\therefore -1 < x < 2$

7. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $\triangle$, $\blacktriangledown$를 $A\triangle B = 2A + B$, $A\blacktriangledown B = A - 3B$로 정의한다.

$A = 2 + 3x^2 - x^3$, $B = x^2 + 3x + 1$일 때 $A\blacktriangledown(B\triangle A)$를 구하면?

① $2x^3 - 18x - 10$

② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$

③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$

④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$

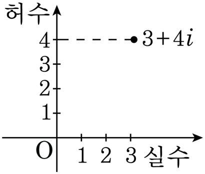
⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$$A\blacktriangledown(B\triangle A) = A\blacktriangledown(2B + A)$$
$$= A - 3(2B + A) = -2A - 6B$$

위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B에 대입하여 정리한다.

8. 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)를 실수의 순서쌍 (a, b)로 나타내어 좌표평면 위에 표시할 수 있다. 예를 들어 $3+4i$를 $(3, 4)$로 나타내면 다음 그림과 같이 표시할 수 있다. $z=1+i$일 때, 0, z, z^2 이 나타내는 점을 각각 A, B, C 라 할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인가? (단, 가장 정확하게 표시한 것을 하나만 고른다.)



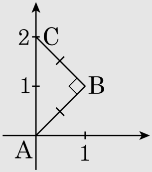
① 정삼각형 ② 이등변삼각형

③ 직각삼각형 ④ 직각이등변삼각형

⑤ 답 없음

해설

$z=1+i \quad z^2=2i \Rightarrow \quad B(1,\ 1),\ C(0,\ 2)$



$\Rightarrow$ 직각이등변삼각형

※ 이와 같이 복소수의 실수부와 허수부를 순서쌍으로 좌표평면에 나타내는 것을 복소평면이라 한다.

9. 방정식$|x-3|+|x-4|=2$의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

ⅰ) $x<3$일 때,

$-(x-3)-(x-4)=3,\ -2x=-5$

$\therefore\ x=\dfrac{5}{2}$

ⅱ) $3 \le x < 4$일 때

$(x-3)-(x-4)=2,\ 0 \cdot x=1$

$\therefore$ 해가 없다.

ⅲ) $x \ge 4$일 때

$x-3+x-4=2,\ 2x=9$

$\therefore\ x=\dfrac{9}{2}$

따라서 $x=\dfrac{5}{2},\ \dfrac{9}{2}$이고 그 합은 7

10. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$의 두 근이 3, b일 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$x = 3$이 $x^2 - ax + 12 = 0$의 근이므로

$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore \; a = 7$

이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$에서 $(x - 3)(x - 4) = 0$

그러므로 $x = 3$또는 $x = 4$

$\therefore \; b = 4 \quad \therefore \; ab = 28$

11. 종섭이와 성제가 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 각각 풀었다. 종섭이는 x 의 계수를 잘못 봐서 $3-2i,\ 3+2i$ 라는 근을 구했고, 성제는 상수항을 잘못 봐서 $2-i,\ 2+i$ 라는 근을 구했을 때, $\left|\dfrac{bc}{a^2}\right|$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

종섭이는 x의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 참이다.

두 근의 곱 $= \dfrac{c}{a} = (3-2i)(3+2i) = 9+4 = 13$

성제는 상수항을 잘못 보았으므로 x의 계수는 참이다.

두 근의 합$=-\dfrac{b}{a} = 2-i+2+i = 4$

$\therefore \left|\dfrac{bc}{a^2}\right| = \left|\dfrac{b}{a} \times \dfrac{c}{a}\right| =|-4 \times 13|=|-52|= 52$

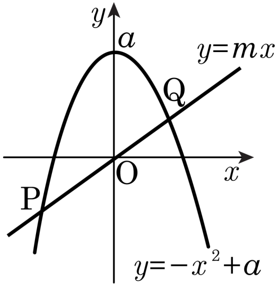
12. 이차방정식 $x^2+4x+a=0$ 의 한 근이 $b+\sqrt{2}i$ 일 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① -14 ② -13 ③ -12 ④ -11 ⑤ -10

해설

한 근이 $b+\sqrt{2}i$ 이면 다른 한 근은 $b-\sqrt{2}i$ 이다.
근과 계수와의 관계를 이용하면
$2b=-4,\ b^2+2=a$
$\therefore\ \ a=6,\ b=-2,\ ab=-12$

13. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+a$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5}-1$일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y=-x^2+a$ 와 $y=mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2+a=mx$ 의 근이다.
점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5}-1$이므로
방정식 $x^2+mx-a=0$의 한 근이 $\sqrt{5}-1$ 이다.
그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}-1$ 이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-m=\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(-\sqrt{5}-1\right)=-2$

$-a=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(-\sqrt{5}-1\right)=-4$

$\therefore a=4,\ m=2 \qquad \therefore a+m=6$

14. x의 범위가 $-2 \le x \le 3$일 때, 함수 $f(x) = x^2 + 2x + C$ 의 최소값이 4 가 되도록 상수 C 의 값을 정할 때, 함수 $f(x)$ 의 최대값은?

① 8　　② 12　　③ 16　　④ 20　　⑤ 24

해설

$f(x) = (x+1)^2 + C - 1$

주어진 범위에서 $x = -1$ 일 때

최소값을 가지므로

$f(-1) = C - 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad C = 5$

$\Rightarrow \quad f(x) = (x+1)^2 + 4$

주어진 범위에서 $x = 3$ 일 때 최대값을 가진다.

$\Rightarrow \quad f(3) = 4^2 + 4 = 20$

15. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$가 $b^3 - ac^2 + a^2b + ab^2 + a^3 - bc^2 = 0$인 관계를 만족할 때, 이 삼각형의 모양은?

① 정삼각형
② 직각삼각형
③ 이등변삼각형
④ 둔각삼각형
⑤ 직각이등변삼각형

해설

차수가 가장 낮은 c에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

$-(a+b)c^2 + a^3 + a^2b + b^3 + ab^2 = 0$

$-(a+b)c^2 + a^2(a+b) + b^2(a+b) = 0$

$-(a+b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$

$(a+b \neq 0)$

$c^2 - a^2 - b^2 = 0$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore\ C = 90°$인 직각삼각형

16. $a+b+c=0$일 때, 다음 중 $2a^2+bc$와 같은 것은?

① $(a-c)^2$ ② $(b+c)^2$ ③ $(a+b)(b+c)$

④ $(a-b)(a-c)$ ⑤ $(a-b)(a+c)$

해설

$2a^2+bc=2a^2-b(a+b)$ $(\because\ c=-a-b)$

$=2a^2-ab-b^2$

$=(a-b)(2a+b)$

$=(a-b)(a+b+a)$

$=(a-b)(a-c)$ $(\because a+b=-c)$

17. $2x^2-3xy+my^2-3x+y+1$ 이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 상수 m 의 값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 3

해설

$2x^2-3xy+my^2-3x+y+1$

$=2x^2-(3y+3)x+my^2+y+1$

이 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로

$D=(3y+3)^2-8(my^2+y+1)$

$=9y^2+18y+9-8my^2-8y-8$

$=(9-8m)y^2+10y+1$

여기서 $D/4=25-(9-8m)=0$ 이어야 하므로

$25-9+8m=0$

$8m=-16$

$\therefore m=-2$

18. x에 대한 이차방정식 $x^2+mx+m^2-1=0$이 정수근을 가질 때, 정수 m의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2+mx+x^2-1=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-m\pm\sqrt[2]{m^2-4(m^2-1)}}{2}$$

이 때, x가 정수이므로

$\sqrt{m^2-4(m^2-1)}=k$(단, k는 정수는 $k\geq 0$)라 하면

$-3m^2+4=k^2$

따라서, m의 개수는 $-1,\ 0,\ 1$로 3개다.

19. x에 대한 항등식 $x^{1997}+x+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$의 모든 계수와 상수항의 합을 구하면?

① 997 ② 998 ③ 1997 ④ $\frac{1997}{2}$ ⑤ $\frac{1997}{3}$

해설

$x^{1997}+x+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$라 하면

$x=1$일 때, $3=a+b$

$x=-1$일 때, $-1=-a+b$

$\therefore\ a=2,\ b=1$

$\therefore\ x^{1997}+x+1=(x^2-1)Q(x)+2x+1$

$x^{1997}-x=(x^2-1)Q(x)$

$x(x-1)(x^{1995}+x^{1994}+\cdots+x+1)$

$=(x-1)(x+1)Q(x)$

$\therefore\ x(x^{1995}+x^{1994}+\cdots+x+1)=(x+1)Q(x)$

$Q(1)$이 $Q(x)$의 모든 계수의 합이므로 $x=1$을 대입하면

$2Q(1)=1996 \quad \therefore\ Q(1)=\frac{1996}{2}=998$

20. 10차 다항식 $P(x)$가 $P(k)=\frac{k}{k+1}$(단, $k=0, 1, 2, \cdots, 10$)을 만족시킬 때, $P(11)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$　　② $\frac{1}{3}$　　③ $\frac{1}{2}$　　④ $\frac{5}{6}$　　⑤ 1

해설

$$P(k)=\frac{k}{k+1} \Rightarrow (k+1)P(k)-k=0$$

$f(x)=(x+1)P(x)-x$라 하면

$f(x)$는 $f(0)=f(1)=f(2)=\cdots$

$=f(10)=0$인 다항식이다.

$\therefore\ f(x)=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$

또, $f(-1)=1=a(-1)(-2)\cdots(-11)$

$=-a\cdot 11!$(단, $11!=1\times 2\times\cdots\times 11$)

$$\therefore\ a=-\frac{1}{11!}$$

$f(11)=12P(11)-11$

$$=-\frac{1}{11!}\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot\cdots\cdot 1=-1$$

$$\therefore\ P(11)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$