1. $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3,\ 1)$ 에서 접하는 직선이 있다. 이 직선의 기울기를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 1)$ 에서의
접선의 방정식은 $-3 \cdot x + 1 \cdot y = 10$
따라서 이 직선의 기울기는 3

2. $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y = x \pm \sqrt{5}$ ② $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$ ③ $y = 4x \pm 2\sqrt{5}$
④ $y = 5x \pm 5\sqrt{5}$ ⑤ $y = x \pm 2\sqrt{5}$

해설

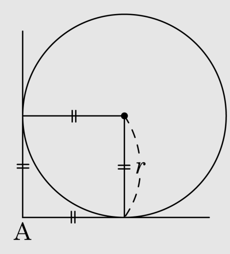
구하는 접선의 방정식은
$y = 2x \pm 3\sqrt{1 + 2^2} \quad \leftarrow \quad m = 2, r = 3$
$\therefore y = 2x \pm 3\sqrt{5}$

3. 좌표평면 위에 원 $(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$과 원 밖의 점 A(2, 1)이 있다. 점 A 에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r의 값은?

① 3　② $\sqrt{10}$　③ $\sqrt{11}$　④ $\sqrt{13}$　⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림처럼 한 변이 r인 정사각형이 된다.



따라서 원 중심에서 A 까지의 거리는 $\sqrt{2}r$ 이 된다.

$\therefore\ \sqrt{(5-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{2}r$

$\therefore\ r=3$

4. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$

$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$ $\sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

5. 좌표평면 위의 두 점 $(2,\ 2)$, $(9,\ 9)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$　　② 5　　③ $\frac{11}{2}$　　④ 6　　⑤ $\frac{13}{2}$

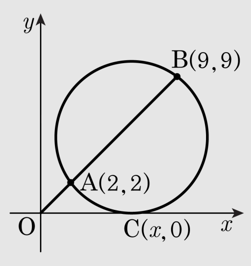
해설

다음 그림에서

$\overline{\mathrm{OC}}^2 = \overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}$

$\therefore\ x^2 = \sqrt{2^2+2^2} \cdot \sqrt{9^2+9^2} = 36$

$\therefore\ x = 6$



6. 원 $x^2 + (y-5)^2 = 4$가 원 $(x-5)^2 + y^2 = 9$의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2　　② 3　　③ 5
④ $5\sqrt{2} - 5$　　⑤ $5\sqrt{2} - 13$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 5)$, $(5, 0)$이므로 중심거리는 $\sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$
두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $5\sqrt{2} - 2 - 3 = 5\sqrt{2} - 5$

7. 원 밖의 한 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 그은 두 접선의 기울기를 $p,\ q$ 라 할 때, $p - q$ 의 값은? (단, $p > q$)

① $\frac{\sqrt{6}}{5}$　② $\frac{2\sqrt{6}}{5}$　③ $\frac{3\sqrt{6}}{5}$　④ $\frac{4\sqrt{6}}{5}$　⑤ $\sqrt{6}$

해설

점 $(3,\ -1)$ 을 지나고 기울기가 m 인 접선을
$y + 1 = m(x - 3)$ 즉, $mx - y - 3m - 1 = 0$ 이라고 하면
원의 중심 $(0, 0)$ 에서 접선까지의 거리는 원의 반지름 2와 같아야 한다. 따라서

$$2 = \frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}},\ |-3m - 1| = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

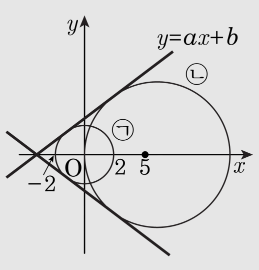
양변을 제곱을 하여 정리를 하면,
$5m^2 + 6m - 3 = 0$ 이다.
이때, 두 기울기 p, q 은 이차방정식의 두근이므로
근과 계수와의 관계에 의하여
두근의 합 $p + q = -\frac{6}{5}$, 두근의 곱 $pq = -\frac{3}{5}$
따라서 $(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq = \frac{36}{25} + \frac{12}{5} = \frac{96}{25}$
따라서 $p - q = \frac{4\sqrt{6}}{5}$

8. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$$x^2 + y^2 = 4\ ,\ (x-5)^2 + y^2 = 25$$

① $y = \pm\frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)
② $y = \pm\frac{4}{5}x \pm 2$ (복부호 동순)
③ $y = \pm\frac{5}{6}x \pm \frac{7}{5}$ (복부호 동순)
④ $y = \pm\frac{9}{10}x \pm \frac{11}{8}$ (복부호 동순)
⑤ $y = \pm\frac{10}{11}x \pm \frac{4}{3}$ (복부호 동순)

해설



$x^2 + y^2 = 4 \cdots\cdots$ ㉠
$(x-5)^2 + y^2 = 25 \cdots\cdots$ ㉡
공통접선의 방정식을 $y = ax + b$ $\cdots\cdots$ ㉢로 놓으면
원 ㉠과 직선㉢, 즉 $ax - y + b = 0$ 이 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$$

$\therefore |b| = 2\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉣
또, 원 ㉡도 직선 ㉢, 즉 $ax - y + b = 0$ 과 접하므로

$$\frac{|5a+b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 5$$

$\therefore |5a+b| = 5\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉤
그런데 $b \neq 0$ 이므로 ㉤ ÷ ㉣을 하면

$$\frac{|5a+b|}{|b|} = \frac{5}{2}$$

$2|5a+b| = 5|b|, 2(5a+b) = \pm 5b$

$\therefore b = -\frac{10}{7}a$ 또는 $b = \frac{10}{3}a$

(i) $b = -\frac{10}{7}a$ 일 때, ㉣에서

$\frac{10}{7}|a| = 2\sqrt{a^2+1}, 5|a| = 7\sqrt{a^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면
$24a^2 + 49 = 0$
이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(ii) $b = \frac{10}{3}a$ 일 때, ㉣에서

$\frac{10}{3}|a| = 2\sqrt{a^2+1}, 5|a| = 3\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $16a^2 = 9, a^2 = \frac{9}{16}$

$\therefore a = \pm\frac{3}{4}, b = \pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)

(i), (ii)로부터 구하는 공통접선의 방정식은

$y = \pm\frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)

9. 두 점 $A(-3,\ 0)$, $B(2,\ 0)$으로부터 거리의 비가 $3:2$인 점을 P라 할 때, $\triangle PAB$의 넓이의 최댓값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

위의 그림과 같이 P 가 $P*$ 에 있을 때 넓이가 최대가 된다.

$\therefore$ 최댓값은 $\frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$ 이다.