

1. $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 1)$ 에서 접하는 직선이 있다. 이 직선의 기울기를 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 1)$ 에서의
접선의 방정식은 $-3 \cdot x + 1 \cdot y = 10$
따라서 이 직선의 기울기는 3

2. $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y = x \pm \sqrt{5}$

② $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$

③ $y = 4x \pm 2\sqrt{5}$

④ $y = 5x \pm 5\sqrt{5}$

⑤ $y = x \pm 2\sqrt{5}$

해설

구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x \pm 3\sqrt{1+2^2} \leftarrow m=2, r=3$$

$$\therefore y = 2x \pm 3\sqrt{5}$$

3. 좌표평면 위에 원 $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = r^2$ 과 원 밖의 점 A(2, 1) 이 있다. 점 A 에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

① 3

② $\sqrt{10}$

③ $\sqrt{11}$

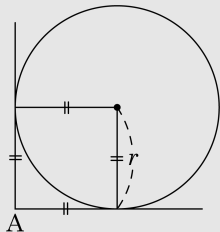
④ $\sqrt{13}$

⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림 처럼 한 변이 r 인 정사각형이 된다.

따라서 원 중심에서 A 까지의 거리는 $\sqrt{2}r$ 이 된다.



$$\therefore \sqrt{(5-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{2}r$$

$$\therefore r = 3$$

4. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{OP}$ 의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$

$\overline{OP}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{OP} = \sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

5. 좌표평면 위의 두 점 $(2, 2)$, $(9, 9)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$

② 5

③ $\frac{11}{2}$

④ 6

⑤ $\frac{13}{2}$

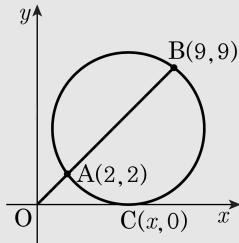
해설

다음 그림에서

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

$$\therefore x^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{9^2 + 9^2} = 36$$

$$\therefore x = 6$$



6. 원 $x^2 + (y - 5)^2 = 4$ 가 원 $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ 의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2

② 3

③ 5

④ $5\sqrt{2} - 5$

⑤ $5\sqrt{2} - 13$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 5)$, $(5, 0)$ 이므로 중심거리는

$$\sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$$

두 원의 반지름은 각각 2, 3 이므로 두 원의 최단거리는 $5\sqrt{2} -$

$$2 - 3 = 5\sqrt{2} - 5$$

7. 원 밖의 한 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 그은 두 접선의 기울기를 p, q 라 할 때, $p - q$ 의 값은? (단, $p > q$)

① $\frac{\sqrt{6}}{5}$

② $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

③ $\frac{3\sqrt{6}}{5}$

④ $\frac{4\sqrt{6}}{5}$

⑤ $\sqrt{6}$

해설

점 $(3, -1)$ 을 지나고 기울기가 m 인 접선을

$y + 1 = m(x - 3)$ 즉, $mx - y - 3m - 1 = 0$ 이라고 하면

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 접선까지의 거리는 원의 반지름 2와 같아야 한다. 따라서

$$2 = \frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}}, \quad |-3m - 1| = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱을 하여 정리를 하면,

$$5m^2 + 6m - 3 = 0 \text{ 이다.}$$

이때, 두 기울기 p, q 은 이차방정식의 두근이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\text{두근의 합 } p + q = -\frac{6}{5}, \quad \text{두근의 곱 } pq = -\frac{3}{5}$$

$$\text{따라서 } (p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq = \frac{36}{25} + \frac{12}{5} = \frac{96}{25}$$

$$\text{따라서 } p - q = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

8. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$$x^2 + y^2 = 4, (x-5)^2 + y^2 = 25$$

① $y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)

② $y = \pm \frac{4}{5}x \pm 2$ (복부호 동순)

③ $y = \pm \frac{5}{6}x \pm \frac{7}{5}$ (복부호 동순)

④ $y = \pm \frac{9}{10}x \pm \frac{11}{8}$ (복부호 동순)

⑤ $y = \pm \frac{10}{11}x \pm \frac{4}{3}$ (복부호 동순)

해설

$$x^2 + y^2 = 4 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$(x-5)^2 + y^2 = 25 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

공통접선의 방정식을 $y = ax + b$
 $\dots\dots \textcircled{㉢}$ 로 놓으면

원 $\textcircled{㉠}$ 과 직선 $\textcircled{㉢}$, 즉 $ax - y + b = 0$ 이
 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$$

$$\therefore |b| = 2\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots \textcircled{㉣}$$

또, 원 $\textcircled{㉡}$ 도 직선 $\textcircled{㉢}$, 즉 $ax - y + b = 0$ 과 접하므로

$$\frac{|5a + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 5$$

$$\therefore |5a + b| = 5\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots \textcircled{㉤}$$

그런데 $b \neq 0$ 이므로 $\textcircled{㉣} \div \textcircled{㉤}$ 을 하면

$$\frac{|5a + b|}{|b|} = \frac{5}{2}$$

$$2|5a + b| = 5|b|, 2(5a + b) = \pm 5b$$

$$\therefore b = -\frac{10}{7}a \text{ 또는 } b = \frac{10}{3}a$$

(i) $b = -\frac{10}{7}a$ 일 때, $\textcircled{㉣}$ 에서

$$\frac{10}{7}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 7\sqrt{a^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$24a^2 + 49 = 0$$

이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(ii) $b = \frac{10}{3}a$ 일 때, $\textcircled{㉣}$ 에서

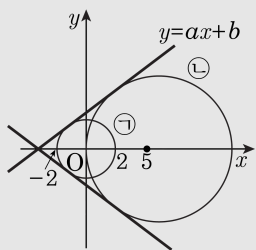
$$\frac{10}{3}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $16a^2 = 9, a^2 = \frac{9}{16}$

$$\therefore a = \pm \frac{3}{4}, b = \pm \frac{5}{2} \text{ (복부호 동순)}$$

(i), (ii)로부터 구하는 공통접선의 방정식은

$$y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2} \text{ (복부호 동순)}$$



9. 두 점 $A(-3, 0)$, $B(2, 0)$ 으로부터 거리의 비가 $3 : 2$ 인 점을 P 라 할 때, $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

위의 그림과 같이 P 가 P^* 에 있을 때 넓이가 최대가 된다.

$\therefore$ 최댓값은 $\frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$ 이다.

