

1. 다음 중 무한집합을 모두 고르면?

① $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$

② $\{x \mid x \text{는 짝수}\}$

③ $\{0\}$

④ $\{x \mid x \text{는 } 1 \text{보다 작은 자연수}\}$

⑤ $\{x \mid x \text{는 } 0 \text{과 } 1 \text{사이의 수}\}$

해설

② $\{2, 4, 6, \dots\}$

⑤ $\{0.1, 0.01, 0.001, \dots\}$

2. 집합 $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, 1, 2\}$ 의 부분집합의 개수는?

- ① 7개 ② 8개 ③ 12개 ④ 16개 ⑤ 32개

해설

집합 A 의 원소의 개수가 4 개이므로 부분집합의 개수는 $2^4 = 16(\text{개})$

3. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① $\emptyset \subset A$

② $\{2\} \subset A$

③ $\{4, 5\} \in A$

④ $n(A) = 5$

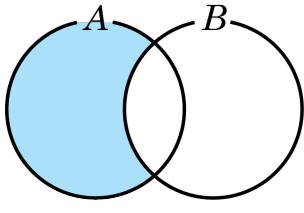
⑤ $\{0, \{2\}\} \subset A$

해설

③ $\{4, 5\} \subset A$

④ $n(A) = 6$

4. 다음 중에서 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



- ① $A - B$ ② $B - A$ ③ $A \cap B$
④ $A \cup B$ ⑤ $B \cap A^c$

해설

②, ⑤

A Venn diagram with two overlapping circles labeled A and B. Circle A is white, and circle B is shaded blue.

③

A Venn diagram with two overlapping circles labeled A and B. The intersection of A and B is shaded blue.

④

A Venn diagram with two overlapping circles labeled A and B. Both circles A and B are shaded blue.

5. 세 집합

$$A = \{w, x, y, z\},$$

$$B = \{x \mid x \text{는 } 30 \text{ 미만의 } 30 \text{의 약수}\},$$

$$C = \{x \mid x \text{는 } 25 \text{ 이하의 소수}\} \text{ 일 때,}$$

$n(A) + n(B) + n(C)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15\}$$

$$C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$$

$$\therefore n(A) + n(B) + n(C) = 4 + 7 + 9 = 20$$

6. 다음 중 옳은 것은?

- ① $\{\emptyset\} \subset \emptyset$
- ② $A \subset \{1, 2, 3, 4\}$ 이고 $A \subset B$ 이면 $\{1, 5\} \subset B$
- ③ $\{4, 5\} \subset \{5, 2 \times 2\}$
- ④ $\{a, b, c, e\} \subset \{a, b, c, d, f\}$
- ⑤ $A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 작은 홀수}\}$ 이면, $\{1, 3, 5, 7\} \subset A$ 이다.

해설

- ① $\{\emptyset\} \not\subset \emptyset$
- ② $A \subset \{1, 2, 3, 4\}$ 이고 $A \subset B$ 이면 $\{1, 5\} \not\subset B$
- ④ $\{a, b, c, e\} \not\subset \{a, b, c, d, f\}$
- ⑤ $A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 작은 홀수}\}$ 이면, $\{1, 3, 5, 7\} \not\subset A$

7. 두 집합 $A = \{a + 1, 4, 5\}$, $B = \{a, 3, 5\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{3, 5\}$ 일 때, a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$3 \in A$ 이므로 $a + 1 = 3$
 $\therefore a = 2$

8. 두 집합 $A = \{1, 2, a\}$, $B = \{5, a + 1, 2 \times a, 11\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{5\}$ 일 때, $(A - B) \cup (B - A)$ 는?

① $\{1, 2, 3\}$

② $\{1, 2, 5, 8\}$

③ $\{1, 2, 7, 8\}$

④ $\{1, 2, 6, 10\}$

⑤ $\{1, 2, 6, 10, 11\}$

해설

$A \cap B = \{5\}$ 이므로 $a = 5$ 이다. 따라서 $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{5, 6, 10, 11\}$ 이므로

$(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2\} \cup \{6, 10, 11\} = \{1, 2, 6, 10, 11\}$ 이다.

9. 명제「 $x = 1$ 이면 $x^2 + 4x - 5 = 0$ 이다.」의 역, 이, 대우 중에서 참인 것을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 대우

해설

주어진 명제가 참이므로 대우가 참이고, 역은 거짓이므로 이도 거짓이다.
(역의 반례: $x = -5$)

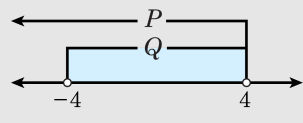
10. $x < 4$ 는 $-4 < x < 4$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p : x < 4, q : -4 < x < 4$ 라고 하면



$\therefore Q \subset P$

11. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고, $a + b + c = 14$ 일 때, $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 2^2 + 3^2) \{ (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \}$$

$$\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$$

$$(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2 \leq 14(a + b + c) = 14^2$$

이 때 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로

$$0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$$

따라서 최댓값은 14이다.

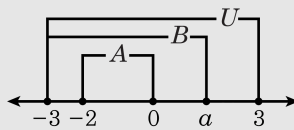
12. $U = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$, $A = \{x | -2 \leq x \leq 0\}$, $B = \{x | -3 \leq x \leq a\}$ 라고 할 때, $B^c \subset A^c$ 가 성립하도록 a 의 범위를 정할 때 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$B^c \subset A^c \leftrightarrow A \subset B$ 이므로 위의 그림에서 $0 \leq a \leq 3 \therefore a$ 의 최댓값은 3이다.



13. 우성, 동건, 정재는 전교 3등 안에 드는 학생들이다.

- ㉠ 우성: 나는 전교 1등이 아니야

㉡ 동건: 나는 2등이 아니야.

㉢ 정재: 나는 2등이야.

위

의 주장 중 하나만 참이라 할 때, 전교1, 2, 3등을 차례대로 적으면?

- ① 동건, 정재, 우성

② 정재, 동건, 우성

③ 우성, 동건, 정재

④ 정재, 우성, 동건

⑤ 동건, 우성, 정재

해설

우성의 주장이 참이라고 가정하면, 동건이와 정재의 주장은 거짓이 된다.

따라서, 우성-전교 1등이 아님, 동건-전교 2등, 정재-전교 2등이 아니다.

이상에서 우성은 전교 1등이 아닌데, 동건이가 2등이므로 당연히 3등이 되고, 남은 정재가 전교 1등이 된다. 즉, 모순이 없으므로 정재, 동건, 우성이 각각 1, 2, 3 등이다.(동건의 주장이 참이라면 우성, 정재가 거짓이 되는데, 이 경우 정재가 2등이 되어 참을 말한 것이 되므로 모순이다. 또한, 정재가 참이라면 우성, 동건이 거짓이 되어야 하는데, 동건이가 참을 말한 결과가 되므로 모순이다.)

14. 세 조건 a, b, c 를 만족하는 값들의 집합을 각각 A, B, C 라고 할 때, $A = \{2p\}$, $B = \{p^2 + 1, 4\}$, $C = \{4, 2p + 1\}$ 이다. a 가 b 이기위한 충분조건이고, b 는 c 이기위한 필요충분조건일 때, p 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$a \Rightarrow b$ 이므로
 $2p = p^2 + 1$ 또는 $2p = 4$
 $b \Leftarrow c$ 이므로 $2p + 1 = p^2 + 1$
 $\therefore p^2 - 2p = 0$
따라서 $p = 0$ 또는 $p = 2$
 $p = 0$ 이면 $2 \times 0 \neq 0 + 1$ 이고 $2 \times 0 \neq 4$ 이므로
 $p = 2$

15. 다음은 $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ 임을 증명하는 과정이다. 빈 칸 (가), (나), (다)에 들어갈 식 또는 기호가 순서대로 바르게 나열된 것을 고르면?

$a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$
(증명)
[가] - [나]
 $= (a + 2\sqrt{ab} + b) - (a + b) = 2\sqrt{ab} > 0$
 $\therefore (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$
그런데, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ [다] 0,
 $\sqrt{a+b}$ [다] 0 이므로 $\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

- ① $\sqrt{a} + \sqrt{b}, \sqrt{a+b}, <$
- ② $\sqrt{a} + \sqrt{b}, \sqrt{a+b}, >$
- ③ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, (\sqrt{a+b})^2, <$
- ④ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, (\sqrt{a+b})^2, >$
- ⑤ $(\sqrt{a+b})^2, (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, >$

해설

양 변을 제곱하여 $a - b > 0$ 이면 $a > b$ 임을 이용한다.

16. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것의 개수는? (단, x, y, z 는 실수이다.)

보기

- ㉠ $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
- ㉡ $x^2 + 4x \geq -4$
- ㉢ $|x| + |y| \geq |x - y|$
- ㉣ $x^2 \geq 0$
- ㉤ $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

- ㉠ $x^2 - xy + y^2 = x^2 - yx + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^2 + y^2$
 $= \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0 \rightarrow$ 절대부등식
 - ㉡ $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0 \rightarrow$ 절대부등식
 - ㉢ $(|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2$
 $(|x - y|)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
 - ㉣ $x^2 \geq 0 \rightarrow$ 절대부등식
 - ㉤ $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$
 $= \frac{1}{2} \{ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \} \geq 0$
 $\rightarrow$ 절대부등식
- 따라서 옳은 것은 모두 4 개이다.

17. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 포함하는 것의 개수를 구하면?

① 32 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 120

해설

‘적어도~’문제에서는 반대의 경우의 수를 구하여 모든 경우의 수에서 빼준다.

모든 부분집합의 수 : $2^6 = 128$ 짝수로만 만들 수 있는 부분집합의 수 : $2^3 = 8$

$\therefore 128 - 8 = 120$

18. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 $A^c \cap B = \emptyset$ 를 만족할 때, 다음 중에서 항상 성립하는 것의 개수는?

㉠ $A = B$	㉡ $A \cup B = B$	㉢ $A^c \subset B^c$
㉣ $A \cap B = B$	㉤ $A \cup B^c = U$	㉥ $A - B = \emptyset$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$A^c \cap B = B - A = \emptyset$ 이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다. $\therefore B \subset A$

㉠ $A = B$ 는 $B \subset A, A \subset B$ 이므로 항상 성립하지 않는다.

㉢ $B \subset A \leftrightarrow A^c \subset B^c$

㉣ $B \subset A \leftrightarrow A \cap B = B$ 이므로 성립한다.

㉤ 위의 그림에서 $A \cup B^c = U$ 이다.

$\therefore$ 3개

19. 등식 $(A - B) - C = A - (B \cup C)$ 를 증명하는 데 꼭 필요한 것을 다음 중에서 모두 고르면?

- | | |
|-------------|------------------------|
| ㉠ 교환법칙 | ㉡ 결합법칙 |
| ㉢ 분배법칙 | ㉣ 흡수법칙 |
| ㉤ 드 모르간의 법칙 | ㉥ $X - Y = X \cap Y^c$ |

- ① ㉡, ㉢, ㉤ ② ㉠, ㉡, ㉢, ㉤ ③ ㉢, ㉣, ㉤
④ ㉡, ㉢, ㉤, ㉥ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$(A - B) - C = (A \cap B^c) - C \cdots \text{㉤}$
 $= (A \cap B^c) \cap C^c \cdots \text{㉡}$
 $= A \cap (B^c \cap C^c) \cdots \text{㉡}$
 $= A \cap (B \cup C)^c \cdots \text{㉤}$
 $= A - (B \cup C) \cdots \text{㉤}$
따라서 ㉡, ㉢, ㉤이다.

20. $x > 1$ 일 때, $2x + \frac{2}{x-1}$ 는 $x = a$ 일 때, 최솟값 b 를 갖는다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned} 2x + \frac{2}{x-1} &= 2 \left(x + \frac{1}{x-1} \right) \\ x + \frac{1}{x-1} &= (x-1) + \frac{1}{x-1} + 1 \\ &\geq 2 \sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} + 1 \\ &= 2 + 1 = 3 \\ \therefore 2 \left(x + \frac{1}{x-1} \right) &\geq 3 \cdot 2 = 6 \\ \text{최솟값은 } x-1 &= \frac{1}{x-1} \text{ 일 때 6이다} \\ \therefore \text{즉, } x &= 2 \text{ 일 때 최솟값은 6이다.} \\ \therefore a + b &= 2 + 6 = 8 \end{aligned}$$