1. x에 대한 이차방정식 $x^2-4x+6=0$의 근을 구하면 $x=a\pm\sqrt{b}i$이다. $a+b$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

$x^2-4x+6=0$
근의 공식을 이용하면 $x=2\pm\sqrt{4-6}=2\pm\sqrt{2}i$
$\therefore a=b=2,\quad a+b=4$

2. x에 대한 이차방정식 $x^2+a(a-1)x+3a=0$의 한 근이 1일 때, 다른 한 근은? (단, a는 상수)

① -1 ② -3 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x=1$을 대입하면

$1^2+a(a-1)+3a=0$

$a^2+2a+1=(a+1)^2=0$

$\therefore\ a=-1$

$x^2-1\cdot(-2)x-3=x^2+2x-3$

$=(x+3)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1,-3\quad \therefore\ x=-3$

3. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-1)x+\frac{1}{4}a^2+a-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 실수 a의 조건을 구하면?

① $a>1$ ② $a<\frac{3}{2}$ ③ $a<\frac{3}{4}$ ④ $a>\frac{3}{4}$ ⑤ $a<2$

해설

판별식을 D라고 하면,

$$D=(a-1)^2-4\left(\frac{1}{4}a^2+a-2\right)=-6\mathrm{a}+9$$

서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$-6a+9>0$에서 $a<\frac{3}{2}$

4. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$의 두 근이 α, β일 때, $\alpha^2 + \beta^2$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

두근의 합 : 3, 두근의 곱 : 1

$$\therefore \quad \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$
$$= 7$$

5. 방정식 $|x|+|x-1|=2$ 의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

ⅰ) $x<0$ 일 때,

$-x-(x-1)=2$ 이므로 $-2x+1=2$

$\therefore\ x=-\frac{1}{2}$

ⅱ) $0\le x<1$ 일 때,

$x-(x-1)=2$ 이므로 $0\cdot x=1$

$\therefore$ 해가 없다.

ⅲ) $1\le x$ 일 때,

$x+x-1=2$ 이므로 $2x=3$

$\therefore\ x=\frac{3}{2}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) 에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

6. x에 대한 이차방정식 $2mx^2+(5m+2)x+4m+1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값은?

① $-\frac{3}{2}$, -2 ② $-\frac{7}{12}$, $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{7}{2}$, 2
④ $-\frac{2}{7}$, 2 ⑤ $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로

$D=(5m+2)^2-4\cdot 2m\cdot(4m+1)=0$

$25m^2+20m+4-32m^2-8m=0$

$7m^2-12m-4=0$

$(7m+2)(m-2)=0$

$\therefore m=-\frac{2}{7}$ 또는 2

7. 이차방정식 $3x^2-6x+k=0$이 허근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k \le 3$ ② $k > 3$ ③ $k \le 2$ ④ $k > 2$ ⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D<0$

$3x^2-6x+k=0$

$$\frac{D}{4}=9-3k<0$$

$\therefore\ k>3$

8. 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+a^2+b-2=0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2+a^2+b-2)=0$$

$\therefore\ -2ka-b+2=0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a=0,\ b=2$

$\therefore\ a+b=2$

9. 이차식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면

이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4=0$

이 중근을 갖는다.

따라서, $\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-(2k^2-6k+4)=0$

위의 식을 정리하면

$-k^2+4k-3=0$

$k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0$에서

$k=1$ 또는 $k=3$

10. 이차식 $x^2 + 2x + 4$ 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 해를 구하면

$x = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm \sqrt{3}i$

$\therefore x^2 + 2x + 4$

$= \left\{x - (-1 + 3\sqrt{i}\right\} \left\{x - (-1 - \sqrt{3}i)\right\}$

$= (x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

11. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때 실수 a, b 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 5$

해설

계수가 실수이므로 한 근이 $1+2i$ 이면 다른 한 근은 $1-2i$ 이다.

(두 근의 합) $= (1+2i) + (1-2i) = -a \quad \cdots\cdots$ ㉠

(두 근의 곱) $= (1+2i)(1-2i) = b \quad \cdots\cdots$ ㉡

$\therefore$ ㉠, ㉡에서

$a = -2,\ b = 5$ 이다.

12. $1 < x < 4$일 때, 방정식 $x^2 + [x] = 4x$의 근의 개수는?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

(i) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로
$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \therefore x = 2 \pm \sqrt{3}$
이것은 모두 $1 < x < 2$를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.
(ii) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$이므로
$x^2 - 4x + 2 = 0, \; \therefore x = 2 \pm \sqrt{2}$
이것은 모두 $2 \le x < 3$를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.
(iii) $3 \le x < 4$일 때, $[x] = 3$이므로
$x^2 - 4x + 3 = 0, \; (x-1)(x-3) = 0$
$\therefore x = 1$ 또는 3
그런데 $3 \le x < 4$를 만족하는 것은 $x = 3$
따라서 주어진 식의 근은 1개이다.

13. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, a, b, c, p, q 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

보기

㉠ 판별식은 b^2-4ac 이다.

㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.

㉢ $a<0$, $c<0$ 이면 허근만 갖는다.

㉣ $a>0$, $c<0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.

㉥ 한 근이 $p+qi$ 이면 다른 한 근은 $q-pi$ 이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 a, b, c 가 실수이므로 판별식 사용 가능(참)

㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)

㉢ b^2-4ac 에서 $ac>0$ 이다.
하지만 $b^2<4ac$ 인 경우만 허근을 가짐(거짓)

㉣ 판별식 b^2-4ac 에서 $ac<0$ 이므로 $b^2-4ac>0$ (참)

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)

㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p+qi$ 이면 $p-qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

14. $x^2 + 2\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}x + \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} = 0$의 근을 판별하면?
(단, a, b, c는 서로 다른 양의 실수이다.)

① 서로 다른 두 허근

② 서로 다른 두 실근

③ 서로 같은 두 실근

④ 서로 다른 두 허근

⑤ 한 근은 실근, 한 근은 허근

해설

$$\frac{D}{4} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{bc}}-\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{bc}}-\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\right\} > 0$$

따라서 서로 두 실근을 갖는다.

(단, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$ 일 때 중근)

15. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$에서 b를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}$, 4를 얻었고, c를 잘못 보아 -1, 4의 두 근을 얻었다. 이 때, 옳은 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

(ⅰ) b를 잘못 본 경우
a와 c는 옳으므로 두 근의 곱은
$$\frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{c}{a} \quad \therefore\ c = 2a$$
(ⅱ) c를 잘못 본 경우
a와 b는 옳으므로 두 근의 합은
$$-1 + 4 = 3 = -\frac{b}{a} \quad \therefore\ b = -3a$$
(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식은
$ax^2 - 3ax + 2a = 0$
$a \neq 0$이므로 $x^2 - 3x + 2 = 0$
$(x-1)(x-2) = 0$
$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = 2$
따라서 근의 합은 3이다.

16. 이차방정식 $-x^2+4x+a=0$의 두 근이 모두 양수이기 위한 a의 최대정수를 m, 이차방정식 $x^2+2(x+1)+k^2-9=0$의 두 근이 서로 다른 부호이기 위한 k의 최소 정수를 n이라 할 때, $m+n$의 값은?

① -8 ② -7 ③ -3 ④ -1 ⑤ 3

해설

(ⅰ) $-x^2+4x+a=0$의 두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta=4$

$\alpha\beta=-a>0$에서 $a<0$

$\frac{D}{4}=4+a\geq 0$에서 $a\geq -4$

$\therefore\ -4\leq a<0$

최대정수 $m=-1$

(ⅱ) $x^2+2x+k^2-7=0$

두 근의 곱 $k^2-7<0$

$\therefore\ -\sqrt{7}<k<\sqrt{7}$

최소의 정수 $n=-2$

$\therefore\ m+n=-3$

17. 방정식 $x^2+x+2=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a\neq 0)$에 대하여 $f(\omega)=3\omega$를 만족한다. 이 때, 실수 a,b의 합은?

① 12 ② -12 ③ 15 ④ -15 ⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore\ \omega^2=-\omega-2$

$$f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$$
$$=(b-a)\omega+(12-2a)$$

$f(\omega)=3\omega$이므로

$(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$

$b-a=3,\ 12-2a=0$ ($\because\ \omega$는 허수)

$\therefore\ a=6,\ b=9$

18. x, y 에 대한 이차식 $2x^2+xy-y^2-x+2y+k$ 가 x, y 에 대한 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 k 의 값은 ?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$2x^2+xy-y^2-x+2y+k$를 x 에 대해 정리하면
$2x^2+(y-1)x-y^2+2y+k$
이 식이 일차식의 곱으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$D=(y-1)^2-4x2(-y^2+2y+k)$$
$$=9y^2-18y-8k+1$$

이 식이 완전제곱식이므로

$$\frac{D'}{4}=9^2+9(-8k+1)$$

$\therefore k=-1$

해설

일차식의 곱으로 이루어져있으므로, 이차항을 이용하여
$(2x-y+a)(x+y+b)$ 로 나타낼 수 있다.
전개하면, $2x^2+xy-y^2+(a+2b)x+(a-b)y+ab$ 이고
문제에 주어진 식과 같아야 되므로,

$$\begin{array}{rl} & a+2b=-1 \\ -) & a-\ \ b=2 \\ \hline & 3b=-3 \end{array}$$

$\therefore a=1,\quad b=-1$
$\therefore k=ab=-1$

19. x에 대한 이차방정식 $3x^2-(2k+5)x+3=0$의 두 근 중 한 근을 α라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\alpha}=k^2$이 성립한다. 이때, 양수 k의 값을 구하면?

① 2 ② $\frac{5}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 3

해설

두 근의 곱이 1이므로 한 근이 a이면

다른 한 근은 $\frac{1}{a}$이다.

$\therefore\ a+\frac{1}{a}=k^2=\frac{2k+5}{3}$

$\therefore\ 3k^2-2k-5=0$

$k=\frac{5}{3}$ 또는 -1

$\therefore$ 양수 $k=\frac{5}{3}$

20. 연립방정식 $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + 4xy + y^2 = 10 \end{cases}$ 의 한 쌍의 근을 $(\alpha,\ \beta)$라 할 때, $\alpha^2,\ \beta^2$을 두 근으로 갖는 이차 방정식으로 옳은 것은?

① $x^2 - 5x + 3 = 0$
② $x^2 + 5x - 3 = 0$
③ $x^2 - 5x + 1 = 0$
④ $x^2 + 6x - 1 = 0$
⑤ $x^2 - 6x + 1 = 0$

해설

$\begin{cases} \alpha - \beta = 2 & \cdots ㉠ \\ \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 = 10 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이므로

㉠의 양변을 제곱하면

$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 4 \quad \cdots ㉢$

㉡ − ㉢에서

$\alpha\beta = 1 \quad \cdots ㉣$

㉣을 ㉡에 대입하면 $\alpha^2 + \beta^2 = 6,\ \alpha^2\beta^2 = 1$

$\therefore\ \alpha^2,\ \beta^2$을 두 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2 - 6x + 1 = 0$