

1. 점 $(1, 2)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 그은 접선 중 x 축과 평행이 아닌 접선의 기울기는?

- ① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

점 $(1, 2)$ 를 지나고 기울기가 m 인 접선의 식을 $y - 2 = m(x - 1)$ 이라 놓으면 원의 중심 $(0, 0)$ 과 $y - 2 = m(x - 1)$ 즉, $mx - y - m + 2 = 0$ 까지의 거리는 원의 반지름 2와 같으므로

$$2 = \frac{|-m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}}, \quad |-m + 2| = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$m^2 - 4m + 4 = 4m^2 + 4, \quad 3m^2 + 4m = 0$$

따라서 기울기 $m = 0, -\frac{4}{3}$ 이다.

x 축과 평행하지 않으므로 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이다.

2. 지름의 길이가 15 cm 인 원에 내접하며 둘레의 길이가 42 cm 인 직사각형의 두 변의 길이는?

- ① 6 cm, 8 cm ② 6 cm, 10 cm ③ 6 cm, 12 cm
④ 9 cm, 10 cm ⑤ 9 cm, 12 cm

해설

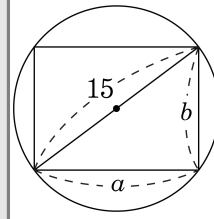
i) $a + b = \frac{42}{2} = 21$

ii) $a^2 + b^2 = 15^2$

i), ii) 를 연립하면, $a^2 + (21 - a)^2 - 225 = 0$

$\Rightarrow a = 12, 9$

$\therefore$ 두 변의 길이는 12 cm, 9 cm

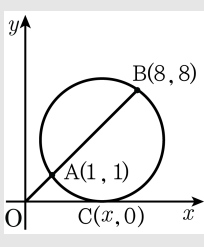


3. 좌표평면 위의 두 점 (1, 1), (8, 8) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

- ① $\frac{5}{2}$
- ② 3
- ③ $\frac{7}{2}$
- ④ $\frac{11}{2}$
- ⑤ 4

해설

다음 그림에서
 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$
 $\therefore x^2 = \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{8^2 + 8^2} = 16$
 $\therefore x = 4$



4. 점 $P(a, 0)$ 에서 원 $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ 에 그은 접선의 길이가 4일 때, 점 P의 좌표를 모두 구하면?

- ① $(1, 0), (7, 0)$ ② $(-1, 0), (7, 0)$ ③ $(1, 0), (-7, 0)$
④ $(-1, 0), (5, 0)$ ⑤ $(1, 0), (-5, 0)$

해설

원의 중심을 $C(3, 2)$, 접점을 Q라 하면

$$\overline{CP} = \sqrt{(a-3)^2 + 2^2}$$

CPQ는 직각삼각형이므로

$$(a-3)^2 + 4 = 2^2 + 4^2$$

$$a^2 - 6a - 7 = 0$$

$$(a+1)(a-7) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 7$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(-1, 0), (7, 0)$ 이다.

5. $(k, 0)$ 에서 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 45° 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

- ① $k = -\sqrt{2} + 1$ ② $k = \sqrt{2} + 1$ ③ $k = \sqrt{2} - 1$
④ $k = 2\sqrt{2} + 1$ ⑤ $k = \sqrt{2} + 2$

해설

$x^2 + y^2 - 2y = 0$ 에서 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 이므로
두 접선 중 하나는 x 축이고,
두 접선이 이루는 각의 크기가 45° 이므로
다른 하나의 접선의 기울기는 -1 이다. ($\because k > 0$)
따라서 접선의 방정식을 $y = -x + b$ 로 놓으면 $x + y - b = 0$
이 때, 원의 중심 $(0, 1)$ 에서 이 직선까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로

$$\frac{|0 + 1 - b|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 1$$

$$\therefore |1 - b| = \sqrt{2}$$

$$b > 1 \text{ 이므로 } b - 1 = \sqrt{2}$$

$$\therefore b = \sqrt{2} + 1$$

따라서 접선의 방정식은 $y = -x + \sqrt{2} + 1$ 이고

점 $(k, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -k + \sqrt{2} + 1 \quad \therefore k = \sqrt{2} + 1$$

6. 두 원 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$, $x^2 + (y-6)^2 = 8$ 사이의 최단거리를 d 라 할 때, d^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 원 사이의 최단 거리는 중심거리에서
두 원의 반지름의 길이를 뺀 것과 같으므로

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{\{0 - (-1)\}^2 + \{6 - (-1)\}^2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\&= 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\&= 2\sqrt{2} \\\therefore d^2 &= 8\end{aligned}$$