1. 점 $(1,\ 2)$에서 원 $x^2 + y^2 = 4$에 그은 접선 중 x축과 평행이 아닌 접선의 기울기는?

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

점 $(1,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 접선의 식을
$y-2=m(x-1)$이라 놓으면 원의 중심 $(0,\ 0)$과
$y-2=m(x-1)$ 즉, $mx-y-m+2=0$까지의 거리는 원의 반지름 2와 같으므로

$$2=\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}},\ |-m+2|=2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$m^2-4m+4=4m^2+4,\ 3m^2+4m=0$$

따라서 기울기 $m=0,\ -\frac{4}{3}$이다.

x축과 평행하지 않으므로 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다.

2. 지름의 길이가 15 cm 인 원에 내접하며 둘레의 길이가 42 cm 인 직사각형의 두 변의 길이는?

① 6 cm, 8 cm ② 6 cm, 10 cm ③ 6 cm, 12 cm

④ 9 cm, 10 cm ⑤ 9 cm, 12 cm

해설

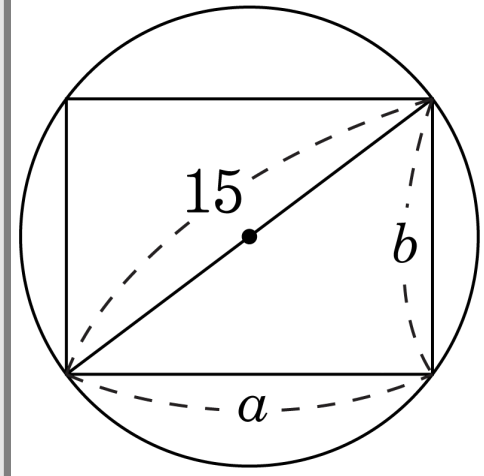
i) $a+b=\frac{42}{2}=21$

ii) $a^2+b^2=15^2$

i), ii) 를 연립하면, $a^2+(21-a)^2-225=0$

$\Rightarrow \quad a=12,\ 9$

$\therefore$ 두 변의 길이는 12 cm, 9 cm



3. 좌표평면 위의 두 점 $(1,\ 1)$, $(8,\ 8)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x좌표는 ?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 4

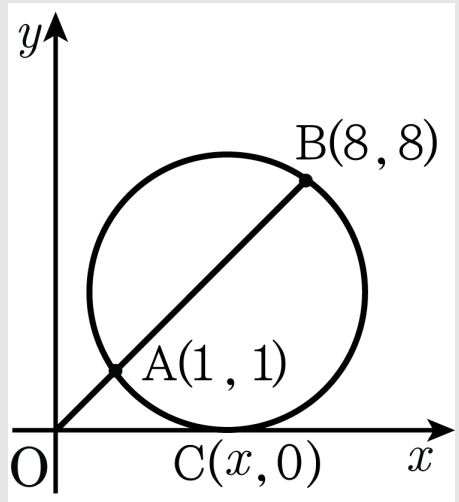
해설

다음 그림에서

$\overline{\mathrm{OC}}^2 = \overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}$

$\therefore\ x^2 = \sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{8^2+8^2} = 16$

$\therefore\ x = 4$



4. 점 $\mathrm{P}(a, 0)$ 에서 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ 에 그은 접선의 길이가 4 일 때, 점 P 의 좌표를 모두 구하면?

① $(1, 0), (7, 0)$ ② $(-1, 0), (7, 0)$ ③ $(1, 0), (-7, 0)$

④ $(-1, 0), (5, 0)$ ⑤ $(1, 0), (-5, 0)$

해설

원의 중심을 $\mathrm{C}(3, 2)$, 접점을 Q 라 하면

$\overline{\mathrm{CP}} = \sqrt{(a-3)^2+2^2}$

CPQ 는 직각삼각형이므로

$(a-3)^2+4=2^2+4^2$

$a^2-6a-7=0$

$(a+1)(a-7)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$

따라서 구하는 점 P 의 좌표는 $(-1, 0), (7, 0)$ 이다.

5. $(k,\ 0)$에서 $x^2+y^2-2y=0$에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 $45°$일 때, 양수 k의 값을 구하면?

① $k=-\sqrt{2}+1$ ② $k=\sqrt{2}+1$ ③ $k=\sqrt{2}-1$

④ $k=2\sqrt{2}+1$ ⑤ $k=\sqrt{2}+2$

해설

$x^2+y^2-2y=0$에서 $x^2+(y-1)^2=1$이므로
두 접선 중 하나는 x축이고,
두 접선이 이루는 각의 크기가 $45°$이므로
다른 하나의 접선의 기울기는 -1이다. $(\because\ k>0)$
따라서 접선의 방정식을 $y=-x+b$로 놓으면 $x+y-b=0$
이 때, 원의 중심 $(0,1)$에서 이 직선까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로

$$\frac{|0+1-b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$$

$\therefore |1-b|=\sqrt{2}$
$b>1$이므로 $b-1=\sqrt{2}$
$\therefore b=\sqrt{2}+1$
따라서 접선의 방정식은 $y=-x+\sqrt{2}+1$이고
점 $(k,0)$을 지나므로
$0=-k+\sqrt{2}+1$ $\therefore k=\sqrt{2}+1$

6. 두 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$, $x^2+(y-6)^2=8$ 사이의 최단거리를 d 라 할 때, d^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 원 사이의 최단 거리는 중심거리에서
두 원의 반지름의 길이를 뺀 것과 같으므로

$$d=\sqrt{\{0-(-1)\}^2+\{6-(-1)\}^2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}$$

$$=5\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}$$

$$=2\sqrt{2}$$

$\therefore\ d^2=8$